Matemáticas
Simplificadas

SEGUNDA EDICIÓN

ARITMÉTICA · ÁLGEBRA · GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA
GEOMETRÍA ANALÍTICA · CÁLCULO DIFERENCIAL · CÁLCULO INTEGRAL

PEARSON

CONAMAT
COLEGIO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

Matemáticas simplificadas

Matemáticas simplificadas

ARTURO AGUILAR MÁRQUEZ
FABIÁN VALAPAI BRAVO VÁZQUEZ
HERMAN AURELIO GALLEGOS RUIZ
MIGUEL CERÓN VILLEGAS
RICARDO REYES FIGUEROA

REVISIÓN TÉCNICA

Ing. Carlos Lozano Sousa (M.Sc.)
Ing. Agustín Vázquez Sánchez (M. en C.)
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Estado de México

Prentice Hall

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

COLEGIO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

Matemáticas simplificadas
Segunda edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2009

ISBN: 978-607-442-348-8

Área: Matemáticas

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 1640

Todos los derechos reservados

Editor: Lilia Moreno Olvera
e-mail: lilia.moreno@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Alejandro Gómez Ruiz
Supervisores de producción: Juan José García Guzmán
Rodrigo Romero Villalobos
José Hernández Garduño

SEGUNDA EDICIÓN, 2009

D.R. © 2009 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5° piso
Industrial Atoto
53519 Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031

Prentice-Hall es marca registrada de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN: 978-607-442-348-8

Prentice Hall
es una marca de

PEARSON

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

Para los que enseñan y para los que aprenden

Ing. Arturo Santana Pineda

El poder de las matemáticas

El que domina las matemáticas
piensa, razona, analiza y por ende
actúa con lógica en la vida cotidiana,
por tanto, domina al mundo.

Ing. Arturo Santana Pineda

Prefacio

El Colegio Nacional de Matemáticas es una institución que, desde su fundación, ha impartido cursos de regularización en las áreas de Matemáticas, Física y Química, con resultados altamente satisfactorios. Es por ello que su fundador y director general, el Ingeniero Arturo Santana Pineda, decidió plasmar y compartir la experiencia adquirida en este libro que recopila lo aprendido en todos estos años y cuyo principio fundamental es que la persona que aprende matemáticas, piensa, razona, analiza y por tanto actúa con lógica.

A través de esta institución y sus docentes, se ha logrado no sólo resolver el problema de reprobación con el que llega el estudiante sino, también, cambiar su apreciación sobre la materia, de tal forma, que se va convencido de que es fácil aprender matemáticas y que puede incluso dedicarse a ellas. De ahí que jóvenes que han llegado con serios problemas en el área, una vez que descubren su potencial han decidido estudiar alguna carrera afín.

De esta forma, se decide unir a los docentes con mayor experiencia y trayectoria dentro de la institución para que conjuntamente escriban un libro que lejos de presunciones formales, muestre la parte práctica que requiere un estudiante al aprender matemáticas y que le sirva de refuerzo para los conocimientos adquiridos en el aula.

Enfoque

El libro tiene un enfoque 100% práctico, por lo que la teoría que se trata es lo más básica posible, sólo se abordan los conceptos básicos para que el estudiante comprenda y se ejercite en la aplicación de la teoría analizada en el aula, en su libro de texto y con su profesor.

De esta manera, se pone mayor énfasis en los ejemplos, en donde el estudiante tendrá la referencia para resolver los ejercicios que vienen al final de cada tema y poder así reafirmar lo aprendido. Estamos convencidos de que es una materia en la cual el razonamiento es fundamental para su aprendizaje, sin embargo, la práctica puede lograr que este razonamiento se dé más rápido y sin tanta dificultad.

Estructura

Matemáticas simplificadas está formado por seis áreas básicas de las matemáticas: Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial y Cálculo Integral. Cada una de ellas está dividida en capítulos, los cuales llevan un orden específico, siempre tomando en cuenta que el estudio de las matemáticas se va construyendo, es decir, cada tema siempre va ligado con los conocimientos adquiridos en los apartados anteriores.

Cada capítulo está estructurado a base de teoría, ejemplos y ejercicios propuestos. Los ejemplos son desarrollados paso a paso, de tal forma que el lector pueda entender el procedimiento y posteriormente resolver los ejercicios correspondientes. La solución a los ejercicios se encuentran al final del libro organizados por área, de tal forma que el estudiante puede verificar si los resolvió correctamente y comprobar su aprendizaje. En esta edición se identifican las secciones que corresponden a los problemas de aplicación, los cuales tienen como objetivo hacer una vinculación con casos de la vida cotidiana en donde se pueden aplicar los conocimientos adquiridos en cada tema.

La primera parte del libro está dividida en once capítulos que corresponden al área de *Aritmética*, materia clave para el estudio de las demás áreas, donde se inicia con los conceptos básicos, para dar paso al estudio de

los números enteros y racionales con sus respectivas operaciones, teoría de números, potenciación y radicación, notación científica, logaritmos, razones y proporciones, sistemas de numeración y al final, un capítulo de razonamiento matemático, donde el lector podrá verificar lo aprendido en esta área.

El estudio del *Álgebra* corresponde a la segunda parte del libro, siendo fundamental para poder aprender cualquier otra materia o tema relacionado con las matemáticas. Está dividida en 17 capítulos, donde se encuentran temas como: Lógica y conjuntos, conceptos básicos de Álgebra, productos notables, factorización, fracciones algebraicas, ecuaciones de primer y segundo grado con aplicaciones, función lineal, sistemas de ecuaciones, potenciación, radicación, números complejos, desigualdades, logaritmos, progresiones, matrices y raíces de una ecuación. Cada tema está desarrollado con la teoría justa y siguiendo con la idea de brindar al lector un gran número de ejemplos para facilitar el aprendizaje de esta materia.

La tercera parte corresponde a las áreas de *Geometría Euclidiana y Trigonometría*, se divide en 17 capítulos. En Geometría se estudian conceptos básicos y temas esenciales como: ángulos, rectas, triángulos, cuadriláteros y polígonos en general, circunferencia y como tema nuevo en esta edición, se agregó el tema de transformaciones (escala, rotación simetría axial, simetría central). Cada apartado con sus respectivas definiciones, teoremas y aplicaciones. También se analiza conceptos como perímetros, áreas y volúmenes de figuras geométricas. Para Trigonometría se estudian las funciones trigonométricas, desde su definición, su cálculo, sus gráficas, identidades, ecuaciones con dichas funciones y, aplicaciones a la solución de triángulos rectángulos y oblicuángulos. Además, se da como un elemento extra la forma trigonométrica de los números complejos.

La *Geometría Analítica* se estudia en la cuarta parte de este libro, a través de trece capítulos que ofrecen las herramientas básicas para abordar los temas de distancia, punto medio, punto de división pendiente, etc., para posteriormente tratar los principales lugares geométricos como: la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. Continúa con un extenso capítulo sobre coordenadas polares y finaliza con el estudio de las ecuaciones paramétricas.

Cálculo Diferencial e *Integral* son los dos apartados con los que concluye el libro. En el primero, se estudia todo lo correspondiente a los conceptos básicos del cálculo diferencial, analizando temas como: funciones, límites (tema que en esta edición fue modificado en su parte teórica), continuidad, la derivada y sus aplicaciones, los cuales son desarrollados de manera amplia y práctica. Algunos de estos temas han sido enriquecidos en su teoría o ejercicios. Para el apartado de Cálculo Integral se estudia desde sumas de Riemann, pasando por integrales inmediatas, métodos de integración, área bajo la curva, volúmenes y algunas aplicaciones en la economía (temas también enriquecidos en esta edición).

El libro tiene la ventaja de contener el material necesario para aprender y verificar el conocimiento adquirido, así como tener la referencia para desarrollar temas, que en el caso de no contar con los elementos necesarios, el lector podrá recurrir a ellos buscando en alguna de las áreas previas a las que está estudiando.

Todo lo anterior hace de este texto una referencia total para que el estudiante de nivel medio superior tenga un material de consulta durante todo su bachillerato, o para aquel que inicie estudios superiores, así como para los profesores que en función de necesidades especificas estén en posibilidad de realizar desde una consulta, hasta contar un apoyo para la parte práctica de su curso empleando los ejercicios propuestos.

Cabe mencionar que para esta edición se tomaron en cuenta las observaciones hechas por estudiantes y profesores que con su colaboración enriquecieron y mejoraron este material.

Agradecimientos

Según Benjamín Franklin, invertir en conocimientos produce siempre los mejores intereses, por lo que espero que obtengas, a través de este libro, las más grandes ganancias para tu futuro profesional.

Arturo Santana
Director General de CONAMAT

A mi madre por darme la vida y enseñarme a vivirla, Andrey por ser y estar conmigo, Chema e Hiram los alumnos que se volvieron mis hermanos, a mi familia (Echeverría, Pineda y Sánchez), a la UNAM, al ingeniero Santana, Rox llegaste a tiempo, a los cuatro fantásticos: Herman, Fabián, Ricardo y Miguel, fue un placer compartir este trabajo. A mis alumnos que fueron y serán.

Arturo Aguilar

A mis padres María Elena y Álvaro, por brindarme la vida, por sus enseñanzas y consejos; a mi esposa e hijos (Ana, Liam y Daniel), porque son la razón de mi vida y mi inspiración; a mis hermanos Belem, Adalid y Tania por apoyarme incondicionalmente y sobre todo a mis compañeros y amigos: Ricardo, Miguel, Arturo y Herman.

Fabián Valapai Bravo

Una vez mi padre me dijo que "un hombre triunfador no es el que acumula riquezas o títulos, sino es aquel que se gana el cariño, admiración y respeto de sus semejantes", agradezco y dedico esta obra a la memoria de mi padre el Sr. Herman Gallegos Bartolo que me dio la vida y que por azares del destino ya no se encuentra con nosotros. A Eli y José Fernando que son el motor de mi vida.

Herman A. Gallegos Ruiz

A toda mi familia muy en especial a Lupita y Agustín, por haberme dado la vida y ser un ejemplo a seguir; a mis hermanos Elizabeth y Hugo por quererme y soportarme. Quiero además, reconocer el esfuerzo de mis amigos y compañeros Arturo, Fabián, Herman y Ricardo con quien tuve la oportunidad de ver cristalizado este sueño.

Miguel Cerón

A mis padres Rosa y Gerardo, por darme la vida; a mis hermanos Javier, Gerardo y Arturo; un especial agradecimiento a mi esposa Ma. Mercedes; a mis hijos Ricardo y Allan por su sacrificio, comprensión y tolerancia; un reconocimiento a mis amigos Herman, Arturo A., Fabián, Miguel, Roxana y Arturo S. por hacer realidad nuestro sueño.

Ricardo Reyes

Un agradecimiento especial a los alumnos que tomaron clase con alguno de nosotros, ya que gracias a ellos logramos adquirir la experiencia para poder escribir este libro.

Los autores

Acerca de los autores

Arturo Aguilar Márquez. Llegó como estudiante a Colegio Nacional de Matemáticas, desarrolló habilidades y aptitudes que le permitieron incorporarse a la plantilla de docentes de la Institución. Realizó estudios de Actuaría en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México y ha impartido clases de Matemáticas por más de 11 años en CONAMAT.

Fabián Valapai Bravo Vázquez. Desde muy temprana edad, con la preparación de profesores de CONAMAT, participó en concursos de matemáticas a nivel nacional. Posteriormente, se incorporó a la plantilla docente de la misma institución donde ha impartido la materia de Matemáticas durante 12 años. Al mismo tiempo, estudió la carrera de Diseño Gráfico en la Escuela Nacional de Artes Plásticas.

Herman Aurelio Gallegos Ruiz. Se inició como profesor en CONAMAT. Realizó estudios en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional y Actuaría en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Ha impartido clases de Matemáticas y Física por más de 15 años en Colegio Nacional de Matemáticas.

Miguel Cerón Villegas. Es egresado de la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas del Instituto Politécnico Nacional, realizó estudios de Ingeniería Industrial y tiene más de 15 años de experiencia en docencia.

Ricardo Reyes Figueroa. Inició su trayectoria en la disciplina de las Matemáticas tomando cursos en CONAMAT. Dejando ver su gran capacidad para transmitir el conocimiento, se incorpora como docente en la misma institución donde ha impartido la materia de Matemáticas y Física durante 19 años. Realizó sus estudios de Matemáticas en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, y de Matemáticas Puras en la Universidad Autónoma Metropolitana.

Contenido

ARITMÉTICA

CAPÍTULO **1** Números reales

Clasificación, 4. Propiedades, 4. Lectura y escritura, 5. Orden, 8. Valor absoluto de un número, 11. Valor absoluto y relativo del sistema posicional decimal, 12.

CAPÍTULO **2** Números enteros

Suma, 16. Resta, 18. Suma y resta con signos de agrupación, 21. Multiplicación, 23. Multiplicación con signos de agrupación, 26. División, 29. *Algoritmo de la división*, 29.

CAPÍTULO **3** Teoría de números

Divisibilidad, 34. *Criterios de divisibilidad*, 34. Números primos, 36. *Descomposición de un número en sus factores primos*, 37. Máximo común divisor (MCD), 38. Mínimo común múltiplo (mcm), 40.

CAPÍTULO **4** Números racionales

Fracción común, 46. *Clasificación*, 47. *Conversiones*, 48. *Fracciones equivalentes*, 49. *Propiedades*, 50. *Ubicación en la recta numérica*, 51. Suma y resta con igual denominador, 52. Suma y resta con diferente denominador, 53. Multiplicación, 56. División, 59. Operaciones con signos de agrupación, 61. Fracciones complejas, 64.

CAPÍTULO **5** Números decimales

Definición, 68. Lectura y escritura, 68. Suma y resta, 71. Multiplicación, 74. División, 77. Conversiones, 81.

CAPÍTULO **6** Potenciación y radicación

Potenciación, 86. *Teoremas*, 87. Radicación, 91. *Teoremas*, 92. *Simplificación*, 94. *Suma y resta*, 95. *Multiplicación*, 97. *División*, 99. *Racionalización*, 101. *Raíz cuadrada*, 104. *Raíz cúbica*, 107. Jerarquía de operaciones, 108.

CAPÍTULO **7** Notación científica y logaritmos

Notación científica, 114. *Suma y resta*, 117. *Multiplicación y división*, 118. *Potencias y raíces*, 120. Logaritmo de un número, 122. *Antilogaritmo*, 124. *Propiedades de los logaritmos*, 125. *Cambios de base*, 128.

CAPÍTULO **8** Razones y proporciones

Cantidades proporcionales, 132. Proporción, 132. *Media proporcional (media geométrica)*, 134. *Cuarta proporcional*, 135. *Tercera proporcional*, 136. Regla de tres simple, 136. Regla de tres compuesta, 140. Tanto por ciento, 141. Interés simple, 147. *Fórmulas para determinar el interés simple*, 147. *Fórmulas para el cálculo del capital, el tiempo y la tasa*, 149.

Capítulo **9** Sistemas de numeración

Definición, 152. Conversiones, 154. *Conversión de un número en base "B" a base 10* $N_{(B)} \rightarrow N_{(10)}$, 154. *Conversión de un número en base 10 a otra base* $N_{(10)} \rightarrow N_{(B)}$, 157. *Conversión de un número binario a octal* $N_{(2)} \rightarrow N_{(8)}$, 160. *Conversión de un número octal a binario* $N_{(8)} \rightarrow N_{(2)}$, 160. *Conversión de un número binario a hexadecimal* $N_{(2)} \rightarrow N_{(16)}$, 161. *Conversión de un número hexadecimal a binario* $N_{(16)} \rightarrow N_{(2)}$, 162. Suma con números en base distinta de 10, 164. Resta con números en base distinta de 10, 169. Multiplicación con números en base distinta de 10, 173. División con números en base distinta de 10, 176. Sistemas antiguos de numeración, 178. *Sistema de numeración maya*, 178. *Sistema de numeración babilónico*, 182. *Sistema de numeración romano*, 185. *Sistema de numeración egipcio*, 187.

Capítulo **10** Sistema métrico decimal y números denominados

Sistema métrico decimal, 194. *Unidades de longitud*, 194. *Equivalencias de longitud en el sistema métrico decimal*, 194. *Unidades de superficie*, 195. *Equivalencias de superficie en el sistema métrico decimal*, 195. *Unidades de volumen*, 196. *Equivalencias de volumen en el sistema métrico decimal*, 196. *Unidades de masa*, 197. *Equivalencias de masa en el sistema métrico decimal*, 197. Números denominados, 198. *Equivalencias de medidas de tiempo*, 198. *Equivalencias de medidas angulares*, 198. *Suma*, 200. *Resta*, 201. *Multiplicación*, 202. *División*, 203.

Capítulo **11** Razonamiento aritmético

Problemas con números enteros, 206. *Problemas con fracciones*, 209. *Problemas de agrupación*, 212. *Suma de los divisores de un número*, 215. *Problemas de repartimientos proporcionales*, 217.

Álgebra

Capítulo **1** Conjuntos y lógica

Simbología, 224. Conjuntos, 225. *Conjuntos de números*, 226. *Tipos de números*, 226. Escritura y representación de conjuntos, 227. Cardinalidad, 228. *Conjuntos equivalentes*, 229. *Conjuntos iguales*, 230. *Conjuntos disjuntos*, 230. Subconjuntos, 231. *Conjunto potencia*, 231. *Conjunto universo*, 232. Diagramas de Venn, 232. Unión de conjuntos, 234. Intersección de conjuntos, 235. Conjunto complemento, 237. Diferencia de conjuntos, 239. Operaciones de conjuntos con diagramas de Venn, 241. Álgebra de conjuntos, 248. Lógica, 249. *Tipos de proposiciones*, 250. Proposiciones compuestas, 250. Leyes de De Morgan, 253. Proposiciones condicionales, 253. Relación de proposiciones abiertas con conjuntos, 254. Cálculo proposicional, 258. *Construcción de las tablas de verdad*, 260. Producto cartesiano de conjuntos, 263.

Capítulo **2** Conceptos básicos de álgebra

Álgebra, 266. *Expresiones algebraicas*, 266. *Reducción de términos semejantes*, 266. *Valor numérico*, 268. *Lenguaje algebraico*, 270. Polinomios, 272. *Suma*, 272. *Resta*, 274. *Signos de agrupación*, 276. *Reglas para suprimir los signos de agrupación*, 276. *Multiplicación*, 278. *División*, 283. *Ley de los exponentes para la división*, 284.

Capítulo **3** Productos notables

Definición, 294. Cuadrado de un binomio, 294. Cuadrado de un trinomio, 295. Binomios conjugados, 297. *Productos donde se aplican binomios conjugados*, 298. Binomios con término común, 300. Cubo de un binomio, 303. Multiplicaciones que se resuelven con la aplicación de productos notables, 304.

Capítulo **4** Factorización

Definición, 308. Factor común, 308. Factor común por agrupación de términos, 309. Diferencia de cuadrados, 311. Trinomio cuadrado perfecto, 312. *Pasos para factorizar un trinomio cuadrado perfecto*, 312.

Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, 315. Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, 318. *Por agrupación de términos*, 319. *Casos especiales*, 320. Suma o diferencia de cubos, 322. Suma o diferencia de potencias impares iguales, 324. Factorización que combina un trinomio cuadrado perfecto y una diferencia de cuadrados, 325. Factorización para completar el trinomio cuadrado perfecto, 326. Expresiones algebraicas donde se utilizan dos o más casos, 327. Descomposición en factores de un polinomio por división sintética, 328.

CAPÍTULO **5** Fracciones algebraicas

Máximo común divisor (MCD), 332. Mínimo común múltiplo (mcm), 332. Simplificación de fracciones algebraicas, 334. Suma y resta de fracciones con denominador común, 336. Suma y resta de fracciones con denominadores diferentes, 337. Multiplicación de fracciones algebraicas, 341. División de fracciones algebraicas, 343. Combinación de operaciones con fracciones, 345. Fracciones complejas, 347.

CAPÍTULO **6** Ecuaciones de primer grado

Conceptos generales, 352. Ecuaciones de primer grado con una incógnita, 352. *Con signos de agrupación y productos indicados*, 355. Fraccionarias, 357. Con valor absoluto, 360. *Con literales*, 362. Problemas sobre números, 363. Problemas sobre edades, 366. Problemas sobre mezclas, 367. Problemas sobre monedas, 369. Problemas sobre costos, 370. Problemas sobre el tiempo requerido para realizar un trabajo, 372. Problemas sobre comparación de distancias y tiempos, 374. Problemas de aplicación a la geometría plana, 376. Despejes de fórmulas, 378.

CAPÍTULO **7** Función lineal

Plano cartesiano, 382. *Localización de puntos*, 382. Función, 383. *Constante*, 383. *Ecuación* $x = k$, 383. *Lineal*, 384. *Generalidades*, 385.

CAPÍTULO **8** Sistemas de ecuaciones

Ecuación lineal, 394. *Solución de una ecuación lineal*, 394. *Gráfica*, 396. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, 398. *Métodos de solución*, 400. Sistema de dos ecuaciones que se reducen a lineales, 412. Métodos para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables, 421. *Reducción (suma y resta)*, 421. *Determinantes*, 426. Descomposición de una fracción algebraica en suma de fracciones parciales, 429.

CAPÍTULO **9** Potenciación

Definición, 438. *Teoremas de los exponentes*, 438. Potencia de un binomio, 447. *Factorial de un número*, 447. *Binomio de Newton*, 447. *Cálculo del* i-ésimo *término*, 450. *Triángulo de Pascal*, 451.

CAPÍTULO **10** Radicación

Radical, 454. *Elementos de un radical*, 454. *Raíz principal de un radical*, 454. Radical como exponente, 454. *Teoremas*, 455. Representación de un exponente fraccionario como radical, 456. Teoremas, 457. *Cálculo de raíces*, 458. Simplificación, 460. Introducción de factores, 462. Suma y resta, 464. Multiplicación, 466. *Con índices diferentes*, 468. División, 469. *Con índices iguales*, 469. *Con índices diferentes*, 470. Racionalización, 471. *Racionalización del denominador de una fracción*, 471. *Racionalización del numerador de una fracción*, 474.

CAPÍTULO **11** Números complejos

Números imaginarios, 478. *Número imaginario puro*, 478. *Suma y resta*, 479. *Potencias de* i, 480. *Multiplicación y división*, 481. Números complejos, 483. *Suma y resta*, 484. *Multiplicación por un escalar*, 485. Multiplicación, 487. *División*, 489. *Representación gráfica*, 490. *Valor absoluto o módulo*, 492. *Conjugado*, 493.

CAPÍTULO **12** Ecuaciones de segundo grado

Definición, 498. Solución de una ecuación de segundo grado completa, 498. *Fórmula general*, 501. *Factorización*, 504. Solución de una ecuación de segundo grado incompleta, 506. *Mixtas*, 506. *Puras*, 507. Función cuadrática, 513. *Análisis de una función cuadrática*, 513. *Relación entre las raíces de una ecuación de segundo grado*, 516. Deducción de una ecuación de segundo grado dadas las raíces, 518. Ecuaciones con radicales, 519. Sistema de ecuaciones cuadráticas, 521. *Procedimiento para la resolución de un sistema de ecuaciones cuadrático-lineal con dos incógnitas*, 521. *Procedimiento para la resolución de un sistema de dos ecuaciones cuadráticas*, 522. *Procedimiento para la resolución de un sistema cuadrático mixto*, 522.

CAPÍTULO **13** Desigualdades

Definición, 526. *Propiedades de las desigualdades*, 526. Desigualdad lineal con una variable, 527. Desigualdad cuadrática con una variable, 530. *Método por casos*, 530. *Método por intervalos*, 530. *Método gráfico*, 533. Desigualdad racional, 535. *Método por casos*, 535. *Método por intervalos*, 538. Desigualdad que tiene la expresión $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$, 540. Desigualdades con valor absoluto, 541. *Casos especiales de desigualdades con valor absoluto*, 542. Gráfica de una desigualdad lineal con dos variables, 544. Sistema de desigualdades lineales con dos variables, 546.

CAPÍTULO **14** Logaritmos

Definición, 550. *Aplicación de la definición de logaritmo*, 551. Propiedades, 552. Aplicación de las propiedades para el desarrollo de expresiones, 553. Ecuaciones logarítmicas, 558. Ecuaciones exponenciales, 560.

CAPÍTULO **15** Progresiones

Sucesión infinita, 572. Suma, 574. Progresión aritmética o sucesión aritmética, 575. *Fórmula para determinar el* n*-ésimo término en una progresión aritmética*, 576. *Fórmulas para determinar el primer término, número de términos y la razón*, 577. *Suma de los* n *primeros términos en una progresión aritmética*, 580. *Interpolación de medios aritméticos*, 583. *Media aritmética o promedio aritmético*, 584. Progresión geométrica o sucesión geométrica, 585. *Fórmula para obtener el* n*-ésimo término en una progresión geométrica*, 586. *Fórmulas para obtener el 1er término, número de términos y la razón*, 588. *Suma de los* n *primeros términos de una progresión geométrica*, 591. *Progresión geométrica infinita*, 594. *Interpolación de medios geométricos*, 596. *Interés compuesto*, 598. *Depreciación*, 601.

CAPÍTULO **16** Matrices

Definición, 604. *Orden de una matriz*, 604. *Número de elementos de una matriz*, 605. *Tipos de matrices*, 605. *Multiplicación por un escalar*, 608. *Suma*, 609. *Resta*, 611. Multiplicación, 613. Propiedades de las matrices, 614. Determinantes, 615. *Sea la matriz de orden 2*, 615. *Sea la matriz de orden 3*, 616. Propiedades, 616. Matriz inversa, 618. *Método de Gauss-Jordan*, 618. Inversa de una matriz para resolver sistemas de ecuaciones, 620.

CAPÍTULO **17** Raíces de un polinomio

Teorema del factor y del residuo, 624. Raíces, 625. *Cálculo de las raíces por división sintética*, 628. *Regla de los signos de Descartes*, 628.

Geometría y trigonometría

Capítulo 1 Conceptos básicos

Conceptos básicos, 636

Capítulo 2 Ángulos

Definición, 640. Medidas, 640. *Sistema sexagesimal*, 640. *Sistema cíclico o circular*, 642. Conversión de grados a radianes y de radianes a grados, 642. Operaciones, 644. Clasificación de acuerdo con su medida, 646. *Convexos*, 646. *Llano o de lados colineales*, 647. *Cóncavo o entrante*, 647. *Perigonal o de vuelta entera*, 647. *Complementarios*, 647. *Suplementarios*, 647. *Conjugados*, 648.

Capítulo 3 Rectas perpendiculares y paralelas

Perpendicularidad, 654. Paralelismo, 654. Ángulos opuestos por el vértice, 655. Ángulos contiguos, 655. Ángulos adyacentes, 655. Rectas paralelas cortadas por una recta secante, 655.

Capítulo 4 Triángulos

Definición, 662. Clasificación de los triángulos, 662. *Por sus lados*, 662. *Por sus ángulos*, 662. Rectas y puntos notables, 663. Teoremas, 664. Triángulos congruentes, 669. *Teoremas de congruencia*, 669. Proporciones, 676. *Teoremas de proporciones*, 677. Semejanza, 678. *Propiedades fundamentales*, 678. *Teoremas de semejanza*, 679. *Teorema de Tales*, 681. Teorema de Pitágoras, 686. *Naturaleza del triángulo a partir del teorema de Pitágoras*, 688. *Teoremas de semejanza en triángulos rectángulos*, 689.

Capítulo 5 Cuadriláteros

Definición, 694. Clasificación, 694. *Teorema*, 695. Propiedades de los paralelogramos, 695. *Demostraciones*, 697. *Paralelogramos especiales*, 698. Propiedades de los trapecios, 700. *Propiedades de los trapecios isósceles*, 700.

Capítulo 6 Polígonos

Definición, 704. Clasificación, 704. *Por sus lados*, 704. *Por sus ángulos*, 704. Elementos, 705. Número de diagonales, 705. *Número de diagonales trazadas desde un mismo vértice*, 705. *Número de diagonales totales*, 705. Ángulos de un polígono, 707.

Capítulo 7 Transformaciones

Escala, 714. *Figuras a escala*, 714. Transformaciones de figuras en el plano, 716. *Traslación*, 716. *Rotación*, 719. Simetría axial, 723. Simetría central, 728.

Capítulo 8 Circunferencia y círculo

Circunferencia, 734. Rectas notables, 734. Porciones de un círculo, 734. Circunferencia y polígonos, 735. Ángulos notables, 735. *Teoremas*, 739. Tangente a una circunferencia, 744. *Longitud de una tangente*, 744. *Propiedades de las tangentes*, 744. Posiciones relativas, 745.

CAPÍTULO **9** Perímetros y superficies

Definiciones, 750. Perímetro y área de una figura plana, 750. *Triángulos*, 750. *Cuadriláteros*, 751. *Polígonos regulares*, 753. *Circunferencia y círculo*, 754. *Sector y segmento circular*, 754. Área de figuras combinadas, 757.

CAPÍTULO **10** Cuerpos geométricos, áreas y volúmenes

Ángulo diedro, 764. *Clasificación*, 764. Ángulo triedro, 764. *Clasificación*, 765. Ángulo poliedro, 766. *Clasificación*, 766. Poliedro, 767. *Elementos*, 767. *Clasificación*, 767. Poliedros regulares, 768. *Clasificación*, 768. *Desarrollo*, 769. *Área y volumen de un poliedro regular*, 769. Prisma, 772. *Clasificación*, 772. Área y volumen, 774. Pirámides, 776. *Área y volumen*, 777. Cuerpos con superficies no planas, 779. *Cilindro circular*, 780. *Cono circular*, 780. Esfera, 783. *Figuras esféricas y zonas esféricas*, 783. *Área de figuras esféricas y volumen de cuerpos esféricos*, 784.

CAPÍTULO **11** Funciones trigonométricas

Funciones trigonométricas, 790. *Definiciones*, 790. *Cofunciones*, 791. *Rango numérico*, 792. *Valor*, 792. *Signos de las funciones trigonométricas en el plano cartesiano*, 794. *Tabla de signos*, 794. Funciones trigonométricas para ángulos mayores que 90°, 796. Funciones trigonométricas de ángulos negativos, 798. Valores numéricos de las funciones trigonométricas circulares, 799.

CAPÍTULO **12** Funciones trigonométricas para ángulos notables

Valor de las funciones trigonométricas de los ángulos de 0°, 90°, 180°, 270° y 360°, 804. Valor de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°, 805. *Aplicación de los valores trigonométricos de los ángulos notables*, 807.

CAPÍTULO **13** Representación gráfica de las funciones trigonométricas

Gráficas de las funciones trigonométricas, 812. *Gráfica de y = sen x*, 812. *Gráfica de y = cos x*, 813. *Gráfica de y = tan x*, 813. *Gráfica de y = ctg x*, 814. *Gráfica de y = sec x*, 814. *Gráfica de y = csc x*, 815. *Resumen*, 815. *Amplitud, periodo y desplazamiento de fase*, 816. *Gráficas de* $y = sen^{-1}x$, $y = cos^{-1}x$, $y = tan^{-1}x$, 819.

CAPÍTULO **14** Identidades y ecuaciones trigonométricas

Identidades trigonométricas, 824. *Obtención de las identidades trigonométricas básicas*, 824. Demostración de identidades trigonométricas, 825. Obtención de las identidades trigonométricas de la suma y la diferencia de ángulos, 830. *Valor de una función trigonométrica para la suma y la diferencia de ángulos* , 832. Aplicación de las funciones trigonométricas de la suma y la diferencia de ángulos, 833. Funciones trigonométricas del ángulo doble, 837. *Seno del ángulo doble sen* (2α), 837. *Coseno del ángulo doble cos* (2α), 837. *Tangente del ángulo doble tan* (2α), 838. Funciones trigonométricas de la mitad de un ángulo, 839. *Seno de la mitad de un ángulo:* $sen\left(\frac{\omega}{2}\right)$, 839. *Coseno de la mitad de un ángulo:* $cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$, 839. *Tangente de la mitad de un ángulo:* $tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$, 839. Identidades trigonométricas para transformar un producto en suma o resta, 844. *Demostración de identidades*, 846. Identidades para transformar sumas o restas de funciones trigonométricas en un producto, 848. *Demostración de identidades*, 851. Ecuaciones trigonométricas, 852.

CAPÍTULO **15** Triángulos rectángulos

Solución de triángulos rectángulos, 858.

Capítulo **16** Triángulos oblicuángulos

Solución de triángulos oblicuángulos, 868. *Ley de senos*, 868. *Ley de cosenos*, 870. *Ley de tangentes*, 872.

Capítulo **17** Forma trigonométrica de los números complejos

Forma trigonométrica o polar, 882. *Operaciones fundamentales*, 883.

Geometría analítica

Capítulo **1** Geometría analítica unidimensional

Segmento de recta, 892. Distancia entre dos puntos, 892. Distancia dirigida, 892. División de un segmento en una razón dada, 894. Punto medio, 896.

Capítulo **2** Geometría analítica bidimensional

Plano cartesiano, 900. *Localización de puntos*, 900. Distancia entre dos puntos, 901. División de un segmento en una razón dada, 903. *Punto medio de un segmento de recta*, 907. *Puntos de trisección de un segmento de recta*, 908. Área de un triángulo, 909. Área de un polígono, 910.

Capítulo **3** Pendiente de una recta

Definiciones, 914. Pendiente de una recta que pasa por dos puntos, 914. *Condición de paralelismo*, 917. *Condición de perpendicularidad*, 918. *Ángulo entre dos rectas*, 920.

Capítulo **4** Lugar geométrico

Problemas fundamentales de la geometría analítica, 926. *Primer problema (discusión de un lugar geométrico)*, 926. *Segundo problema (dadas las condiciones del lugar geométrico, encontrar su ecuación)*, 931.

Capítulo **5** Línea recta

Definición, 936. Ecuaciones de la recta, 936. *Ecuación general*, 936. *Ecuación punto – pendiente*, 936. *Ecuación de la recta que pasa por dos puntos*, 936. Formas de la ecuación de una recta, 941. *Ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen (forma ordinaria o reducida)*, 941. *Ecuación de la recta en su forma simétrica*, 946. *Familia de rectas*, 949. *Ecuación de la recta en su forma normal*, 951. Rectas notables en el triángulo, 961. *Mediatriz*, 961. *Mediana*, 961. *Altura*, 962. *Bisectriz*, 965.

Capítulo **6** Circunferencia

Definición, 970. Ecuaciones de la circunferencia, 970. *Ecuación en su forma ordinaria*, 970. *Ecuación en su forma general*, 970. *Ecuación en su forma canónica*, 970. *Transformación de la ecuación general a la forma ordinaria*, 976. *Familia o haz de circunferencias*, 980.

Capítulo **7** Transformación de coordenadas

Traslación de ejes, 982. *Traslación de un punto a un nuevo sistema de coordenadas*, 982. *Transformación de una curva trasladando el origen*, 983. *Transformación de una ecuación*, 985.

Capítulo 8 Parábola

Definición, 990. Ecuación de la parábola con vértice en el origen, 992. *Elementos y ecuación de una parábola con vértice en el origen*, 992. Ecuación de la parábola con vértice en el punto *(h, k)*, 998. *Elementos y ecuación de una parábola con vértice en (h, k)*, 999. Ecuación de la parábola que pasa por tres puntos, 1004. Ecuación de una recta tangente a una parábola, 1007.

Capítulo 9 Elipse

Definición, 1010. Ecuación de una elipse con centro en el origen, 1011. *Elementos y ecuación*, 1012. *Dados sus elementos obtener la ecuación de la elipse con centro en el origen*, 1015. Ecuación de una elipse con centro en el punto *(h, k)*, 1018. *Dada la ecuación, obtener sus elementos*, 1019. *Dados sus elementos, obtener la ecuación*, 1022. *Casos especiales*, 1025. *Ecuación de la elipse que pasa por cuatro puntos*, 1026. *Ecuación de una recta tangente a una elipse*, 1030.

Capítulo 10 Hipérbola

Definición, 1032. Ecuación de una hipérbola con centro en el origen, 1034. *Elementos y ecuación*, 1035. *Dada la ecuación*, *obtener sus elementos*, 1036. *Dados sus elementos*, *obtener la ecuación*, 1039. Ecuación de una hipérbola con centro en el punto *(h, k)*, 1041. *Elementos y ecuación*, 1041. *Dada la ecuación obtener sus elementos*, 1043. *Dados sus elementos obtener la ecuación*, 1046. *Casos especiales*, 1049. *Ecuación de una recta tangente a una hipérbola en un punto cualquiera*, 1051.

Capítulo 11 Ecuación general de cónicas

Rotación de ejes, 1054. *Ángulo de rotación*, 1055. Transformación de la ecuación general de segundo grado, 1056. *Transformación aplicando las identidades trigonométricas*, 1057. Transformación de la ecuación de una cónica por rotación y traslación de los ejes, 1059. Identificación de una cónica, 1061. *Identificación de cónicas degeneradas*, 1063. Definición general de cónicas, 1065. Ecuaciones de las directrices de la elipse y de la hipérbola, 1067. Tangente a una cónica, 1069. *Dado el punto de tangencia*, 1069. *Dada la pendiente de la recta tangente*, 1071. *Dado un punto exterior a la curva*, 1073.

Capítulo 12 Coordenadas polares

Sistema polar, 1076. *Gráfica de un punto en coordenadas polares*, 1076. Conversión de un punto en coordenadas polares, 1078. Relación entre las coordenadas rectangulares y polares, 1078. *Transformación de un punto en coordenadas polares a rectangulares*, 1079. *Transformación de un punto en coordenadas rectangulares a polares*, 1079. Distancia entre dos puntos en coordenadas polares, 1081. Área de un triángulo en coordenadas polares, 1081. Transformación de una ecuación rectangular a polar, 1082. Transformación de una ecuación polar a rectangular, 1084. Identificación de una cónica en su forma polar, 1087. Gráfica de una ecuación en coordenadas polares, 1088. *Análisis de una ecuación en coordenadas polares*, 1088. Ecuación polar de la recta, 1093. Ecuación polar de la circunferencia, 1095. Intersección de curvas en coordenadas polares, 1095.

Capítulo 13 Ecuaciones paramétricas

Definición, 1100. Transformación de ecuaciones paramétricas a rectangulares, 1100. *Sistemas paramétricos algebraicos*, 1100. *Sistemas de ecuaciones paramétricas que contienen funciones trigonométricas*, 1103.

CÁLCULO DIFERENCIAL

CAPÍTULO 1 Relaciones y funciones

Relación, 1110. Función, 1110. *Notación*, 1113. *Clasificación*, 1113. *Valor de una función*, 1113. Dominio, contradominio y rango de una función, 1116. Algunos tipos de funciones, 1119. *Función constante*, 1119. *Función lineal*, 1120. *Función identidad*, 1122. *Función cuadrática*, 1122. *La función f(x) 5 xn*, 1123. *Función racional*, 1124. *Función raíz cuadrada*, 1127. *Función valor absoluto*, 1129. *Función mayor entero*, 1132. Función característica, 1135. Gráfica de una función a partir de otra conocida, 1136. *Desplazamientos*, 1136. *Alargamientos*, 1136. *Reflexiones verticales y horizontales*, 1137. Funciones creciente y decreciente, 1140. Funciones inyectiva, suprayectiva y biyectiva, 1140. *Función inyectiva (uno a uno)*, 1140. *Función suprayectiva*, 1142. *Función biyectiva*, 1143. Operaciones con funciones, 1144. Función composición (Función de funciones), 1147. Funciones par e impar, 1150. Función inversa, 1151. *Propiedades*, 1152. Funciones trascendentes, 1153. *Función exponencial*, 1153. Funciones trigonométricas, 1156. Las funciones como modelos matemáticos, 1158.

CAPÍTULO 2 Límites

Definición intuitiva de límite, 1162. Definición formal de límite, 1166. *Teoremas*, 1168. *Límites cuando x tiende al infinito*, 1176. *Asíntotas horizontales*, 1178. *Asíntotas oblicuas*, 1180. *Límites laterales*, 1183. *Límites de funciones trigonométricas*, 1186.

CAPÍTULO 3 Continuidad

Continuidad puntual, 1194. *Discontinuidad evitable o removible*, 1196, Continuidad de una función en un intervalo, 1201. *Continuidad por la derecha*, 1201. *Continuidad por la izquierda*, 1201. *Continuidad de una función en un intervalo abierto*, 1201. *Continuidad en un intervalo cerrado*, 1202. *Continuidad en un intervalo semiabierto*, 1204. Teorema del valor intermedio, 1206.

CAPÍTULO 4 La derivada

Definición, 1210. *Interpretación geométrica*, 1210. *Regla de los cuatro pasos*, 1211. *Fórmulas para determinar la derivada de una función algebraica*, 1213. *Derivadas de funciones trascendentes*, 1220. *Derivadas de funciones implícitas*, 1233. *Derivadas de orden superior*, 1237. *Derivadas de ecuaciones polares*, 1240. *Derivada de ecuaciones paramétricas*, 1241.

CAPÍTULO 5 Aplicaciones de la derivada

Rectas tangente y normal a una curva, 1246. *Tangente*, 1246. *Normal*, 1246. *Ecuación de la recta tangente*, 1247. *Ecuación de la recta normal*, 1247. Ángulo entre dos curvas, 1251. Curvatura, 1254. *Radio de curvatura*, 1254. *Círculo de curvatura*, 1256. *Centro de curvatura*, 1256. *Radio de curvatura en coordenadas paramétricas*, 1258. *Radio de curvatura en coordenadas polares*, 1259. Máximos y mínimos de una función, 1261. *Criterio de la primera derivada para encontrar puntos máximos y mínimos*, 1261. *Criterio de la segunda derivada para encontrar puntos máximos y mínimos*, 1265. *Optimización*, 1268. *Movimiento rectilíneo uniforme*, 1276. *Aceleración media*, 1277. *Razón de cambio*, 1278. *Aplicaciones a la economía*, 1287. *Regla de L9Hôpital*, 1293. *Teorema de Rolle*, 1299. *Teorema del valor medio*, 1301. *Diferenciales*, 1303. *Aplicaciones de la diferencial*, 1306.

CÁLCULO INTEGRAL

CAPÍTULO **1** Sumas

Definición, 1314. *Propiedades*, 1314. *Suma de Riemann (rectángulos inscritos y circunscritos)*, 1316.

CAPÍTULO **2** Integrales inmediatas

Definición, 1322. *Integrales por cambio de variable*, 1323.

CAPÍTULO **3** Integrales de diferenciales trigonométricas

Integrales de la forma: $\int \text{sen}^m v\, dv$, $\int \cos^n v\, dv$, con m y n impar, 1344. Integrales de la forma: $\int \tan^n v\, dv$, $\int \cot^n v\, dv$ con n par o impar, 1346. Integrales de la forma: $\int \sec^n v\, dv$, $\int \csc^n v\, dv$ con n par, 1348. Integrales de la forma: $\int \tan^m v \cdot \sec^n v\, dv$, $\int \cot^m v \cdot \csc^n v\, dv$ con n par y m par o impar, 1349. Integrales de la forma: $\int \text{sen}^m v\, dv$ y $\int \cos^n v\, dv$, con m y n par, 1351. Integrales de la forma $\int \text{sen}\, mx \cdot \cos nx\, dx$, $\int \text{sen}\, mx \cdot \text{sen}\, nx\, dx$, $\int \cos mx \cos nx\, dx$, 1354.

CAPÍTULO **4** Métodos de integración

Sustitución trigonométrica, 1358. Integración por partes, 1361. Integración por fracciones parciales, 1365. Integración por sustitución de una nueva variable, 1375. *Diferenciales que contienen potencias fraccionarias de x*, 1375. *Diferenciales que contienen potencias fraccionarias de a 1 bx*, 1376. *Integración de las diferenciales binomias*, 1379. *Transformaciones de diferenciales trigonométricas*, 1382.

CAPÍTULO **5** Aplicaciones de la integral

Constante de integración, 1388. Integral definida, 1391. *Cálculo de una integral definida*, 1391. *Propiedades de la integral definida*, 1391. *Área bajo la curva*, 1393. *Fórmula de trapecios*, 1397. *Fórmula de Simpson* $\frac{1}{3}$, 1401. Área entre curvas planas, 1402. *Rectángulos de base dx*, 1402. *Rectángulos de base dy*, 1402. Volumen de sólidos de revolución, 1406. *Método de discos*, 1406. *Método de las arandelas*, 1408. *Método de capas*, 1410. Longitud de arco, 1415. Aplicaciones a la economía, 1417. *Función de costos*, 1417. *Función de ingresos*, 1418.

CAPÍTULO **6** Ecuaciones diferenciales

Introducción, 1422. Definición, 1422. Ecuación diferencial de primer orden, 1424. *Variables separables*, 1424. Ecuaciones homogéneas, 1434.

Solución a los ejercicios de aritmética, 1441. Solución a los ejercicios de álgebra, 1455. Solución a los ejercicios de geometría y trigonometría, 1497. Solución a los ejercicios de geometría analítica, 1525. Solución a los ejercicios de cálculo diferencial, 1553. Solución a los ejercicios de cálculo integral, 1587. Tablas, 1603.

Aritmética

Capítulo 1

Números reales

Reseña HISTÓRICA

Los números naturales tienen su origen en una necesidad tan antigua como lo son las primeras civilizaciones: la necesidad de contar.

El hombre primitivo identificaba objetos con características iguales y podía distinguir entre uno y otro; pero no le era posible captar la cantidad a simple vista. Por ello empezó a representar las cantidades mediante marcas en huesos, trozos de madera o piedra; cada marca representaba un objeto observado, así concibió la idea del número.

Para el siglo X d. C. el matemático y poeta Omar Khayyam estableció una teoría general de número y añadió algunos elementos a los números racionales, como son los irracionales, para que pudieran ser medidas todas las magnitudes.

Sólo a finales del siglo XIX se formalizó la idea de continuidad y se dio una definición satisfactoria del conjunto de los números reales; los trabajos de Cantor, Dedekind, Weierstrass, Heine y Meray, entre otros, destacan en esta labor.

Omar Khayyam
(1048-1122)

Clasificación

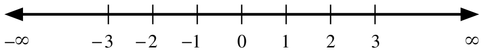
El hombre ha tenido la necesidad de contar desde su aparición sobre la Tierra hasta nuestros días, para hacerlo se auxilió de los números 1, 2, 3, 4, 5,…, a los que llamó números naturales. Números que construyó con base en el principio de adición; sin embargo, pronto se dio cuenta de que este principio no aplicaba para aquellas situaciones en las que necesitaba descontar. Es entonces que creó los números negativos, así como el elemento neutro (cero), que con los números naturales forman el conjunto de los números enteros, los cuales son:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Asimismo, se percató que al tomar sólo una parte de un número surgían los números racionales, que se expresan como el cociente de 2 números enteros, con el divisor distinto de cero, ejemplo: $\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{0}{5}, \frac{6}{1}, -\frac{8}{2}, \ldots$

Aquellos números que no es posible expresar como el cociente de 2 números enteros, se conocen como números irracionales: $\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{81}, \pi, \ldots$

Al unir los números anteriores se forman los números reales, los cuales se representan en la recta numérica.



Propiedades

Los números reales son un conjunto cerrado para la suma y la multiplicación, lo que significa que la suma o multiplicación de números reales da como resultado otro número real. De lo anterior se desprenden las siguientes propiedades:

Propiedad	Suma	Multiplicación	Ejemplos
Cerradura	$a + b \in R$	$a \cdot b \in R$	$3 + 5 = 8 \in R$ $(2)(-3) = -6 \in R$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	$\frac{1}{2} + \frac{3}{7} = \frac{3}{7} + \frac{1}{2}$ $(2)\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)(2)$
Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a(b \cdot c) = (a \cdot b)c$	$\sqrt{5} + (3 + 4) = (\sqrt{5} + 3) + 4$ $3 \cdot (2 \cdot 5) = (3 \cdot 2) \cdot 5$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$	$5 + 0 = 5$ $7 \cdot 1 = 7$
Inverso	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$	$2 + (-2) = 0$ $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$
Distributiva	$a(b + c) = ab + ac$		$2(7 + 3) = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3$ $5 \cdot 4 + 5 \cdot 8 = 5(4 + 8)$

EJERCICIO 1

Identifica y escribe el nombre de la propiedad a la que se hace referencia.

1. $3+(-3)=0$
2. $\left(\frac{1}{3}\right)(4)=(4)\left(\frac{1}{3}\right)$
3. $(8)(-3)=-24 \in R$
4. $7\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 4\right)=\left(7\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot 4$
5. $-\frac{3}{4}+0=-\frac{3}{4}$
6. $4(-3+5)=4(-3)+4(5)$
7. $\frac{1}{\sqrt{7}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=0$
8. $(-3)+(-8)=-11 \in R$
9. $-\frac{2}{4}+\frac{5}{9}=\frac{5}{9}+\left(-\frac{2}{4}\right)$
10. $3+\left(-2+\sqrt{7}\right)=\left(3+(-2)\right)+\sqrt{7}$
11. $2\cdot\sqrt{3}+2\cdot 7=2\left(\sqrt{3}+7\right)$
12. $-8\cdot 1=-8$
13. $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{4}}=1$
14. $-\sqrt{2}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}+\left(-\sqrt{2}\right)$
15. $(8)(4)=(4)(8)$
16. $5\cdot(3\cdot 6)=(5\cdot 3)\cdot 6$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Lectura y escritura

Un número en el sistema decimal se escribe o se lee con base en la siguiente tabla:

Billones			Millares de millón			Millones			Millares			Unidades		
Centenas de billón	Decenas de billón	Unidades de billón	Centenas de millares de millón	Decenas de millares de millón	Unidades de millares de millón	Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades

En la tabla, los billones, millares de millón, millones, millares y unidades reciben el nombre de periodos, los que a su vez se dividen en clases y cada una de éstas se forma por unidades, decenas y centenas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Lee el número 37.

Solución

37 se acomoda de derecha a izquierda en el periodo de las unidades.

Unidades		
Centenas	Decenas	Unidades
	3	7

Al número dado lo forman 3 decenas y 7 unidades y se lee: "treinta y siete".

2 Lee el número 824.

Solución

824 se acomoda de derecha a izquierda en el periodo de las unidades.

Unidades		
Centenas	Decenas	Unidades
8	2	4

Al número lo forman 8 centenas, 2 decenas y 4 unidades. Se lee: "ochocientos veinticuatro".

3 Lee el número 37 643.

Solución

Se acomoda en los periodos de los millares y las unidades.

Millares			Unidades		
Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
	3	7	6	4	3

El número se lee: "treinta y siete mil seiscientos cuarenta y tres".

4 Lee el número 52 384 273.

Solución

Se acomoda en los periodos de los millones, millares y unidades.

Millones			Millares			Unidades		
Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
	5	2	3	8	4	2	7	3

Se lee: "cincuenta y dos millones trescientos ochenta y cuatro mil doscientos setenta y tres".

5 Lee el número 962 384 502 936 114.

Solución

Se acomodan en los periodos desde las unidades a los billones.

Billón			Millar de millón			Millón			Millares			Unidades		
Centenas de billón	Decenas de billón	Unidades de billón	Centenas de millar de millón	Decenas de millar de millón	Unidades de millar de millón	Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
9	6	2	3	8	4	5	0	2	9	3	6	1	1	4

Se lee: "novecientos sesenta y dos billones, trescientos ochenta y cuatro mil quinientos dos millones, novecientos treinta y seis mil ciento catorce".

EJERCICIO 2

Escribe con letras las siguientes cifras.

1. 45
2. 80
3. 523
4. 770
5. 597
6. 8 302
7. 9 016
8. 20 018
9. 11 011
10. 9 072
11. 12 103
12. 22 500
13. 34 480
14. 108 214
15. 3 084 000
16. 1 215 364
17. 5 683 040
18. 13 000 075

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para escribir numéricamente una cantidad, se identifican los periodos y las clases de dicho número como lo ilustran los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

1 Expresa cuatrocientos ochenta y siete numéricamente.

Solución

Este número sólo abarca el periodo de las unidades y se forma por cuatro centenas (400), ocho decenas (80) y siete unidades (7), al aplicar el principio aditivo el número es:

cuatrocientos		400
ochenta	+	80
siete		7
		487

2 Escribe con número: siete mil cuatrocientos treinta y cinco.

Solución

La cantidad abarca hasta el periodo de los millares, entonces:

siete mil		7 000
cuatrocientos		400
treinta	+	30
cinco		5
		7 435

3 Expresa numéricamente: doscientos noventa y nueve millones setecientos ocho.

Solución

La cantidad abarca hasta el periodo de los millones, entonces:

doscientos millones		200 000 000
noventa millones		90 000 000
nueve millones	+	9 000 000
setecientos		700
ocho		8
		299 000 708

EJERCICIO 3

Representa numéricamente:

1. Quinientos veintiuno.
2. Dieciséis mil.
3. Mil doscientos noventa y nueve.
4. Treinta y cinco mil.
5. Ocho mil cuatrocientos.
6. Seiscientos uno.
7. Setecientos mil ciento treinta y ocho.
8. Un millón quinientos veintisiete mil cuatrocientos veintiocho.
9. Un millón ciento ocho mil doce.
10. Ciento cuarenta y cuatro millones, ciento cuarenta y cuatro.
11. Ciento dieciséis millones, trescientos ochenta y seis mil quinientos catorce.
12. Quinientos cinco millones doscientos diez.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Orden

Este conjunto se ordena con base en las siguientes relaciones de orden:

$<$ menor que $\quad >$ mayor que $\quad =$ igual que

Ejemplos

$3 < 8$; 3 es menor que 8 $\quad 12 > -7$; 12 es mayor que -7 $\quad \frac{18}{2} = 9$; $\frac{18}{2}$ es igual que 9

- **Postulado de tricotomía**
  Si $a, b \in R$, entonces al compararlos se pueden presentar los siguientes casos:

$$a > b \qquad a < b \qquad a = b$$

- **Postulado transitivo**
  Sean $a, b, c \in R$, si $a > b$ y $b > c$ entonces:

$$a > c$$

- **Postulado aditivo**
  Para $a, b, c \in R$, si $a > b$, entonces:

$$a + c > b + c$$

- **Postulado multiplicativo**
  Sean $a, b, c \in R$, con $a > b$,

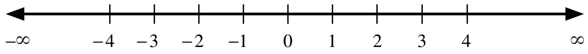
si $c > 0$ (c es positivo), entonces $ac > bc$.

si $c < 0$ (c es negativo), entonces $ac < bc$.

Otra forma para comparar los números reales es colocarlos en la recta numérica. Si el número a se encuentra a la derecha de b, entonces $a > b$, pero, si se encuentra a la izquierda, entonces $a < b$.

Ejemplos

Observe la siguiente recta numérica:



Se puede afirmar que:

$4 > 1$, "4" se encuentra a la derecha de "1"

$2 > -2$, "2" está a la derecha de "−2"

$-3 < -1$, "−3" está a la izquierda de "−1"

$-3 < 0$, "−3" está a la izquierda de "0"

En general, cualquier número negativo es menor que cero o que cualquier positivo, ya que se encuentran a la izquierda de estos números en la recta real o numérica.

EJERCICIO 4

Compara las siguientes cantidades y coloca los símbolos: >, < o =, según corresponda.

1. 28 y 35
2. 1 125 y 1 105
3. -372 y 372
4. -483 y -840
5. 5 397 y $-1\,284$
6. -844.5 y 0
7. $\frac{8}{4}$ y 2
8. 12 000 y 120 000
9. $-1\,000\,000$ y $-100\,000$
10. $\frac{121}{11}$ y $\frac{44}{4}$
11. $-\frac{7}{3}$ y 1.5
12. 0.5 y $-\frac{1273}{9}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para comparar dos números racionales se realiza un producto cruzado, como se ejemplifica a continuación:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Compara $\frac{7}{8}$ y $\frac{5}{6}$.

Solución

Se realiza el siguiente procedimiento:

Se multiplica el numerador 7 de la primera fracción por el denominador 6 de la segunda y el producto se coloca debajo de la primera fracción; enseguida se realiza la multiplicación del denominador 8 de la primera fracción por el numerador 5 de la segunda y el producto se coloca debajo de la segunda fracción, el resultado de los productos y se coloca el signo correspondiente.

$$\frac{7}{8} \text{ y } \frac{5}{6}$$
$$(7)(6) \quad (5)(8)$$
$$42 > 40$$

El signo entre 42 y 40 es el mismo para los números racionales, por tanto: $\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$

2 Compara $-\frac{2}{3}$ y $-\frac{1}{8}$.

Solución

Se realizan los pasos del ejemplo anterior y se obtiene:

$$-\frac{2}{3} \text{ y } -\frac{1}{8}$$
$$(8)(-2) \quad (3)(-1)$$
$$-16 < -3$$

Por tanto: $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{8}$

EJERCICIO 5

Compara las siguientes cantidades y coloca los símbolos >, < o =, según corresponda.

1. $\frac{2}{3}$ ___ $\frac{1}{4}$
2. $\frac{3}{5}$ ___ $\frac{7}{8}$
3. $-\frac{1}{6}$ ___ $-\frac{1}{2}$
4. $\frac{7}{9}$ ___ $\frac{21}{27}$
5. $\frac{11}{4}$ ___ $\frac{12}{5}$
6. $\frac{6}{4}$ ___ $\frac{18}{12}$
7. $-\frac{7}{7}$ ___ 0
8. $-\frac{5}{10}$ ___ $\frac{13}{26}$
9. $\frac{5}{2}$ ___ 1
10. $\frac{17}{6}$ ___ 3
11. -3 ___ $-\frac{39}{13}$
12. $\frac{4}{3}$ ___ $\frac{4}{9}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Valor absoluto de un número

Es la distancia que existe desde cero hasta el punto que representa a dicha cantidad en la recta numérica. El valor absoluto de un número a se representa como $|a|$.

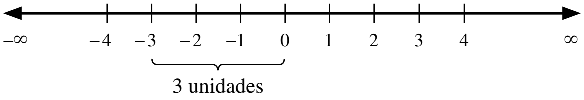
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el valor absoluto de -3.

Solución

Se representa -3 en la recta numérica:

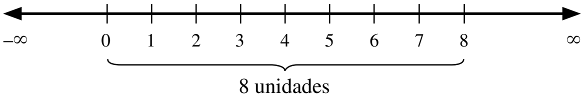


De cero a -3 se observa que hay 3 unidades de distancia, por tanto, el valor absoluto de -3 es igual a 3 y se representa como: $|-3| = 3$.

2 Encuentra el valor de $|8|$.

Solución

En la recta numérica la distancia entre el origen y 8 es de 8 unidades, por consiguiente, $|8| = 8$



3 ¿Cuál es el valor absoluto de $\left|-\frac{7}{2}\right|$?

Solución

En la recta numérica hay siete medios de distancia entre el cero y el punto dado, por tanto: $\left|-\frac{7}{2}\right| = \frac{7}{2}$

EJERCICIO 6

Determina:

1. $|-10|$
2. $\left|\frac{7}{4}\right|$
3. $|-9|$
4. $\left|\frac{5}{2}\right|$
5. $\left|-\frac{1}{3}\right|$
6. $|-2.5|$
7. $\left|-\frac{13}{9}\right|$
8. $\left|\frac{9}{3}\right|$
9. $|3.2|$
10. $|-6.8|$
11. $|0|$
12. $|-0.0001|$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Valor absoluto y relativo del sistema posicional decimal

El sistema decimal emplea los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que al combinarlos mediante ciertas reglas pueden representar cualquier cantidad. En este sistema las unidades se agrupan de 10 en 10, razón por la cual recibe su nombre.

Para nombrar cifras mayores que 9 se emplea el principio posicional y aditivo.

En el principio posicional el valor absoluto de un dígito es el número que representa, y su valor relativo es el que adquiere de acuerdo con la posición que tiene en el número.

Ejemplo

En el número 4 342, el valor absoluto y relativo de cada dígito es:

Dígito	Valor absoluto	Valor relativo
2	2	2
4	4	40
3	3	300
4	4	4 000

En la tabla anterior se observa que el dígito 4 tiene distintos valores relativos, como consecuencia de la posición que ocupa en el número.

EJERCICIO 7

Determina cuál es el valor absoluto y relativo de los dígitos que se indican en los siguientes números:

Número	Valor absoluto	Valor relativo
1. $1\underline{3}$		
2. $\underline{8}9$		
3. $\underline{3}72$		
4. $1\ \underline{5}24$		
5. $\underline{7}\ 893$		
6. $1\underline{5}\ 278$		
7. $\underline{4}2\ 939$		
8. $153\ \underline{9}75$		
9. $794\ 5\underline{6}8$		
10. $1\ 5\underline{0}2\ 734$		
11. $1\underline{2}\ 364\ 568$		
12. $1\underline{5}7\ 103\ 000$		

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

De acuerdo con el principio aditivo toda cantidad o número mayor que 9, en el sistema decimal, se expresa como la suma de los valores relativos, la cual se denomina forma desarrollada. Analicemos los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

1 Expresa en forma desarrollada 72 435.

Solución

Se obtienen los valores relativos de cada uno de los dígitos que conforman el número:

Dígito	Valor relativo
5	5
3	30
4	400
2	2 000
7	70 000

Por lo tanto, su forma desarrollada es:

$$72\,435 = 70\,000 + 2\,000 + 400 + 30 + 5$$

2 Expresa el número 1 023 000 en forma desarrollada.

Solución

$$1\,023\,000 = 1\,000\,000 + 20\,000 + 3\,000$$

3 Expresa en forma desarrollada el número 373 894.

Solución

$$373\,894 = 300\,000 + 70\,000 + 3\,000 + 800 + 90 + 4$$

EJERCICIO 8

Expresa en forma desarrollada los siguientes números:

1. 75
2. 132
3. 428
4. 510
5. 3 002
6. 7 491
7. 15 204
8. 32 790
9. 49 835
10. 246 932
11. 300 000
12. 475 314
13. 120 983
14. 1 320 865
15. 3 742 958

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 2

NÚMEROS ENTEROS

Reseña HISTÓRICA

Durante los siglos VI y VII, los hindúes fueron los pioneros en usar las cantidades negativas como un medio para representar las deudas.

No obstante su uso en esos siglos, la aceptación del concepto de número negativo en Occidente fue un proceso de una lentitud sorprendente, ya que, por varios siglos, los números negativos no fueron considerados como cantidades verdaderas, debido a la imposibilidad de representarlos en el mundo físico.

Finalmente, y con mucha dificultad, los números negativos fueron considerados en la resolución de ecuaciones, según se refleja en los escritos del matemático italiano Gerónimo Cordano: "Olvidad las torturas mentales que esto os producirá e introducid estas cantidades en la ecuación".

En el siglo XIX aún existía entre los matemáticos de Occidente una gran desconfianza en el manejo de las cantidades matemáticas, hasta que en el mismo siglo Weierstrass hizo la construcción formal de los números enteros a partir de los números naturales.

Karl Weierstrass
(1815-1897)

Suma

En esta operación los elementos reciben el nombre de sumandos y el resultado suma o adición. La suma o adición de números enteros se efectúa sólo si los signos de los números son iguales.

EJEMPLOS

1 ¿Cuál es el resultado de $3 + 9$?

Solución

En esta operación ambos sumandos tienen el mismo signo (+), por lo tanto, se suman sus valores absolutos y el signo del resultado es el mismo (+).

$$3 + 9 = 12$$

2 Realiza $-5 - 1 - 3$.

Solución

Los números tienen el mismo signo (−), por consiguiente, se suman sus valores absolutos y el signo del resultado es el mismo que el de los sumandos (−).

$$-5 - 1 - 3 = -9$$

Para sumar números de dos o más dígitos, los sumandos se ordenan en forma vertical para hacer coincidir las respectivas clases y se realiza la operación, columna por columna y de derecha a izquierda.

EJEMPLOS

1 Efectúa la operación $325 + 63$.

Solución

Se acomodan de manera vertical y se realiza la operación:

$$\begin{array}{r} 325 \\ +\ \ 63 \\ \hline 388 \end{array}$$

Por tanto, el resultado de la operación es 388

2 El resultado de $-1\,533 - 2\,980 - 537$ es:

Solución

Al hacer coincidir las clases y sumar se obtiene:

$$\begin{array}{r} -1\,533 \\ -2\,980 \\ -\ \ \ 537 \\ \hline -5\,050 \end{array}$$

El resultado de la operación es $-5\,050$

EJERCICIO 9

Efectúa las siguientes operaciones:

1. 364 + 93
2. 4 050 + 2 019 + 310
3. 11 207 + 5 874 + 453 + 96
4. 102 396 + 11 375 + 1 117 + 60
5. 1 123 005 + 2 475 727 + 704 973 + 53 200
6. 7 000 000 + 648 000 + 53 047 + 4 200 + 600
7. −242 − 563
8. −1 250 − 398
9. −6 359 − 4 872 − 45
10. −372 001 − 200 000 − 50 007 − 14 304
11. −13 275 009 − 4 000 529 − 363 571 − 42 500 − 95
12. −512 013 419 − 23 642 000 − 1 253 421 − 683 125

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Una empresa cobra 12% sobre los ingresos mensuales de 5 franquicias. La cantidad que paga cada una es: $45 400, $38 900, $72 300, $58 600 y $92 100, ¿qué cantidad recibió la empresa en un mes?

Solución

Para determinar cuánto recibió la empresa se realiza la suma de las cantidades pagadas:

$$\begin{array}{r} 45\,400 \\ 38\,900 \\ +\quad 72\,300 \\ 58\,600 \\ \underline{92\,100} \\ 307\,300 \end{array}$$

Por consiguiente, la empresa recibió $307 300

2 Una persona le adeuda a su tarjeta de crédito $6 000 y realiza con ella un pago de $2 500, si el banco le cobra $500 de intereses y recargos, ¿cuál es el nuevo saldo de la tarjeta?

Solución

Los adeudos de la persona se representan con cantidades negativas; entonces, para obtener su nuevo saldo se efectúa la siguiente operación:

$$\begin{array}{r} -6\,000 \\ -2\,500 \\ -\quad \underline{500} \\ -9\,000 \end{array}$$

El signo negativo del resultado indica que la persona le adeuda al banco $9 000

EJERCICIO 10

Resuelve las siguientes operaciones:

1. Leticia tiene 15 años actualmente, ¿qué edad tendrá dentro de 22 años?
2. Uriel se ha preparado durante toda su vida, invirtió 2 años en el nivel preescolar, 6 en primaria, 3 en secundaria, 3 en el bachillerato, 5 más en la licenciatura y, finalmente, 3 años en un posgrado. ¿Durante cuántos años estudió Uriel?
3. Luis ganó \$1 500 en febrero, \$3 500 en marzo, \$2 800 en abril, \$2 200 en el siguiente mes, ¿cuánto dinero ganó en total?
4. Carlos nació en 1978, a la edad de 26 años se graduó en la carrera de ingeniería y 2 años después se casó. ¿En qué años se verificaron estos 2 sucesos?
5. Efraín nació en 1960, se casó a los 28 años, a los 3 años de matrimonio nació su único hijo. Si Efraín falleció cuando su hijo tenía 14 años, ¿en qué año ocurrió su fallecimiento?
6. Un automóvil realiza un viaje en tres etapas para ir de una ciudad a otra: en la primera etapa recorre 210 kilómetros, en la segunda 180 y en la última 360; ¿qué distancia existe entre las ciudades?
7. En una carrera de automóviles, el automóvil que lleva la delantera ha recorrido 640 kilómetros; si para llegar a la meta le faltan 360 kilómetros, ¿cuál es la distancia que deben recorrer todos los automóviles para finalizar la competencia?
8. Una editorial publica 12 000 ejemplares de un libro de álgebra, 8 000 de uno de geometría analítica y 10 700 de uno de cálculo diferencial e integral, ¿cuántos libros de las tres áreas publica en total?
9. Una persona ingiere en el desayuno un jugo de naranja con 20 calorías de contenido energético, unos huevos fritos de 800 calorías, una rebanada de pan con 50 calorías y un cóctel de frutas de 150 calorías, ¿cuántas calorías consume en total?
10. Cierto famoso jugador de futbol nació en 1966, a los 17 años ganó el mundial juvenil, a los 24 el mundial de primera fuerza, 4 años más tarde perdió una final de campeonato mundial y 3 años después se retiró del futbol, ¿cuál fue el año de su retiro?
11. En un día en la Antártica el termómetro marca una temperatura de 35°C bajo cero y el pronóstico meteorológico indica que en las siguientes horas la temperatura descenderá 18°C más, ¿cuál es la nueva temperatura que registrará el termómetro?
12. Una empresa reporta en los últimos 4 meses las siguientes pérdidas: \$330 000, \$225 000, \$400 000 y \$155 000, ¿a cuánto asciende el monto total de las pérdidas?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Resta

Es la operación inversa de la suma o adición. Los elementos de una resta son el minuendo (+), sustraendo (–) y la diferencia.

$$\begin{array}{rl} a & \longleftarrow \text{Minuendo} \\ -b & \longleftarrow \text{Sustraendo} \\ \hline c & \longleftarrow \text{Diferencia} \end{array}$$

- Cuando se restan 2 números enteros la diferencia lleva el signo del entero de mayor valor absoluto, como lo muestran los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa 9 – 7.

Solución

Se efectúa la operación y el resultado lleva el signo del número con mayor valor absoluto.

$$9 - 7 = 2$$

El resultado de la operación es 2

2 ¿Cuál es el resultado de 3 – 4?

Solución

Se realiza la operación 4 – 3 = 1, y al resultado se le antepone el signo negativo, debido a que el número de mayor valor absoluto es negativo, por tanto:

$$3 - 4 = -1$$

- Si los números son de dos o más dígitos, entonces se acomodan de manera vertical para que coincidan las clases y se efectúan las operaciones, columna por columna, de derecha a izquierda:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza: 289 – 47.

Solución

Las cantidades se acomodan de manera vertical y el resultado lleva el mismo signo que 289, ya que es el número de mayor valor absoluto.

$$\begin{array}{r} 289 \\ -\ 47 \\ \hline 242 \end{array}$$

Por consiguiente: 289 – 47 = 242

2 A qué es igual –425 + 379.

Solución

Se efectúa la diferencia de 425 – 379 y al resultado se le antepone el signo negativo.

$$\begin{array}{r} 425 \\ -\ 379 \\ \hline 46 \end{array}$$

Por tanto, –425 + 379 = –46

3 El resultado de –6 – 3 – 2 + 8 + 1 es:

Solución

Se suman las cantidades que tienen el mismo signo.

$$-6 - 3 - 2 = -11 \qquad 8 + 1 = 9$$

Entonces: –6 – 3 – 2 + 8 + 1 = –11 + 9

Se realiza la resta y se obtiene el resultado final: –6 – 3 – 2 + 8 + 1 = –11 + 9 = –2

4 Realiza: $-8+12-3+9-1-15+7$.

Solución

Para obtener el resultado, primero se agrupan los números del mismo signo.

$$-8+12-3+9-1-15+7=-8-3-1-15+12+9+7$$

Los números de igual signo se suman y posteriormente se restan:

$$=-27+28$$
$$=1$$

EJERCICIO 11

Realiza las siguientes operaciones:

1. $-2+6$
2. $-7+4$
3. $-9+11$
4. $-20+15$
5. $15-23$
6. $49-35$
7. $-8+8$
8. $-14+25$
9. $105-143$
10. $-1\,024+958$
11. $-2-5+8$
12. $-13-15+6+11$
13. $-9-7-8-2+5+4+11$
14. $-6-10-3+12+13+14$
15. $13-2-5-9-1+8-11$
16. $25+23-8-7-4-3$
17. $14+15+18-7-3-20$
18. $100-6-5-4-3-42-51$
19. $47-12+7-9-1$
20. $-6+8+4-2-5+3-2+10$
21. $-3+6-2+4-7+10$
22. $5-6+9-7-3+10+11$
23. $-1+2-3+4-5+6-7+8-9$
24. $15-10-3+18-20+9-2$
25. $1-2-3-5+6-7+10+11-13$
26. $4-3-2+6+1-5+4-8-9$
27. $531-120-402+101$
28. $-853+45+73+183+2-166$
29. $9\,031-1\,217-1\,902+4\,701-18$
30. $1\,432+17\,913-19\,935-2\,001-7\,034$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Al comprar un televisor de \$2 809 a crédito, hay que dar un anticipo de \$748 y el resto se paga a 6 meses, ¿cuánto resta para terminar de pagar el televisor?

Solución

Al costo del televisor se le resta el anticipo para saber cuánto falta por pagar:

$$\begin{array}{r} 2\,809 \\ -\;\;748 \\ \hline 2\,061 \end{array}$$

Por tanto, resta pagar \$2 061

EJERCICIO 12

Resuelve las siguientes operaciones:

1. En un colegio hay una población de 800 alumnos, de ellos 430 son varones, ¿cuántas mujeres hay en la escuela?
2. ¿Cuánto dinero le falta a Ernesto si su ahorro es de $12 000 para comprar un automóvil que cuesta $35 000?
3. Ángel al vender su casa en $250 000, obtiene una ganancia de $13 000, ¿cuánto le había costado su casa?
4. La suma de las edades de Laura y Carina es de 48 años, si Laura tiene 25 años, ¿cuál es la edad de Carina?
5. Si Fernanda tuviera 8 años menos tendría 35 y si Guillermo tuviera 10 años más tendría 25, ¿cuánto más joven es Guillermo que Fernanda?
6. Una cuenta de ahorro tiene un saldo de $2 500, si se efectúa un retiro de $1 500 y se cobra una comisión de $7 por disposición ¿cuánto queda disponible en la cuenta?
7. Un rollo de tela tiene una longitud de 40 metros, el lunes se vendieron 3, el martes 8, el miércoles 5 y el jueves 6, ¿cuántos metros de tela quedan para vender el resto de la semana?
8. Un atleta debe cubrir una distancia de 10 000 metros, si recorre 5 850, ¿qué distancia le falta recorrer?
9. Juan solicitó un préstamo de $20 000: el primer mes abonó $6 000, el segundo $4 000, y en el tercero $5 500, ¿cuánto le falta pagar para cubrir su adeudo?
10. La edad de Abigail es de 31 años, la de Mario es de 59 y la diferencia de las edades de Carmen y Clara es de 37 años, ¿en cuánto excede la suma de las edades de Abigail y Mario a la diferencia de las de Carmen y Clara?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta con signos de agrupación

Al realizar sumas y restas de números enteros que tienen signos de agrupación, primero es necesario eliminar dichos signos, para hacerlo debes seguir el siguiente procedimiento:

- Si a un signo de agrupación lo precede un signo positivo, el número entero que encierra conserva su signo. Analicemos los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $(-8)+(-3)$?

Solución

Puesto que ambos signos de agrupación están precedidos por signos positivos, entonces se suprimen y se realiza la operación para obtener el resultado:

$$(-8)+(-3)=-8-3=-11$$

2 Efectúa $(+6)+(-8)$.

Solución

Al estar precedidos por signos positivos, ambos enteros conservan su signo y se obtiene como resultado:

$$(+6)+(-8)=6-8=-2$$

- Si un signo de agrupación es precedido por un signo negativo, entonces el entero que encierra cambia su signo:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve $-(14) - (-10)$.

Solución

A los signos de agrupación le anteceden signos negativos, entonces se deben cambiar los signos de los enteros y realizar la operación que resulta.

$$-(14) - (-10) = -14 + 10 = -4$$

El resultado de la operación es -4.

2 ¿Cuál es el resultado de $(-6) + (-3) - (-11)$?

Solución

Se aplican los procedimientos correspondientes a cada signo de agrupación y se procede a efectuar la operación con enteros:

$$(-6) + (-3) - (-11) = -6 - 3 + 11 = -9 + 11 = 2$$

3 Obtén el resultado de $(6 - 8) + (5 - 2)$.

Solución

Una forma de realizar la operación es efectuar las operaciones que encierran cada uno de los signos de agrupación:

$$(6 - 8) + (5 - 2) = (-2) + (3)$$

Se aplican los criterios mencionados y se realizan las operaciones pertinentes para obtener el resultado:

$$= -2 + 3 = 1$$

4 Realiza $(8 - 3) - (-4 + 6) + (2 - 7 - 3) + 5$.

Solución

Otra forma de obtener el resultado es aplicar los criterios para cada una de las cantidades contenidas en cada signo de agrupación y, posteriormente, las operaciones con números enteros correspondientes.

$$\begin{aligned}(8 - 3) - (-4 + 6) + (2 - 7 - 3) + 5 &= 8 - 3 + 4 - 6 + 2 - 7 - 3 + 5\\ &= 8 + 4 + 2 + 5 - 3 - 6 - 7 - 3\\ &= 19 - 19\\ &= 0\end{aligned}$$

5 ¿Cuál es el resultado de $[(-8 + 6) - (-3 - 2)] + [4 - (2 - 1)]$?

Solución

Se efectúan las operaciones contenidas en los paréntesis:

$$[(-8 + 6) - (-3 - 2)] + [4 - (2 - 1)] = [(-2) - (-5)] + [4 - (1)]$$

Se eliminan los paréntesis y se realizan las operaciones que encierran los corchetes:

$$\begin{aligned}&= [-2 + 5] + [4 - 1]\\ &= [3] + [3]\\ &= 3 + 3\\ &= 6\end{aligned}$$

EJERCICIO 13

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $(3)+(12)$
2. $(-6)+(-2)$
3. $-(-15)-(-9)$
4. $8+(13)$
5. $(15)+(-8)$
6. $(-4)-(-2)$
7. $-6-(-5)$
8. $(11)+(8)$
9. $(-9)+(-1)-(-10)$
10. $(11)-(13)+(-16)$
11. $-(-24)+(-13)-(9)$
12. $-(7)+(-3)-(-16)$
13. $9-(-6)+(-12)$
14. $(3)-(6)+(-5)-(-8)$
15. $9-(5)+(-3)-(11)$
16. $(8+5)-(-13+2)$
17. $(-3-9)-(8+7)$
18. $15-(4+6)+(-3-7)$
19. $(9+5)-(8-11)-19$
20. $(8-25)-(8+5)+(13+11)$
21. $-(5-7)+(16+3)-(4+7)$
22. $-(-7-2)+(6+4)-(-3)-4$
23. $1-(-3-2+8)+(2+3+1)$
24. $4-\{6+[-5+(12-8)]\}$
25. $-5+\{4+[3-(4-8)+(-5-10)]\}$
26. $-[(8+3)-(5-1)]+[(8-3)-(5+1)]$
27. $\{9-[2-(1-5)]\}-[4-(5-4)+(-5)]$
28. $[(4+2-11)+(13+9-20)]-[(-3+5-21)-(18-15+6)]$
29. $12-[(6-4)+(8-15)]-[4-(3+2)-(1-7)]$
30. $-[-8+(4-7)+(2-5-3)]+[(6-3)-(2-5-6)-12]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación

La multiplicación es la representación de la suma de una misma cantidad varias veces. Una multiplicación se representa con los símbolos, "×" "·" o "( )".

Ejemplo

La multiplicación de 3×4 es lo mismo que:

$$3\times 4=4+4+4=12 \text{ o bien } 4\times 3=3+3+3+3=12$$

Los elementos de una multiplicación reciben el nombre de factores y el resultado producto o multiplicación. Así, en el ejemplo anterior, 3 y 4 son los factores y 12 es el producto.

Para no realizar las sumas, se utilizan de forma mecánica las tablas de multiplicar.

Al multiplicar números de varios dígitos, éstos se colocan en vertical y se realiza el procedimiento que muestran los ejemplos siguientes:

EJEMPLOS

1 ¿Cuál es el resultado de 358×6?

Solución

Se acomodan los factores y 6 multiplica de derecha a izquierda a cada uno de los dígitos del número 358

$$\begin{array}{r} 358 \\ \times\ \ 6 \\ \hline 2\,148 \end{array}$$

2 Efectúa $2\,624 \times 45$.

Solución

Se multiplica 5 por 2 624

$$\begin{array}{r} 2624 \\ \times\ 45 \\ \hline 13120 \end{array}$$

Se multiplica 4 por 2 624 y el resultado 10 496 se coloca debajo del anterior (13 120) recorriendo el último dígito un lugar a la izquierda con respecto al primer producto.

$$\begin{array}{r} 2624 \\ \times\ 45 \\ \hline 13120 \\ 10496 \end{array}$$

Las cantidades se suman para obtener el resultado de la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 2624 \\ \times\ 45 \\ \hline 13120 \\ 10496 \\ \hline 118080 \end{array}$$

Por consiguiente, $2\,624 \times 45 = 118\,080$

Leyes de los signos 1. El producto de dos números con signos iguales da como resultado un número positivo.

Ejemplo

$$(8)(5) = 40 \quad ; \quad (-3)(-7) = 21$$

Leyes de los signos 2. El producto de dos números con signos diferentes da como resultado un número negativo.

Ejemplo

$$(-6)(4) = -24 \quad ; \quad (9)(-3) = -27$$

En general, la aplicación simbólica de las leyes de los signos anteriores es:

$(+)(+) = +$ $\quad$ $(+)(-) = -$ $\quad$ $(-)(-) = +$ $\quad$ $(-)(+) = -$

EJEMPLOS

1 Efectúa $(-3)(-4)(-6)$.

Solución

Se realiza el producto de $(-3)(-4)$ y el resultado, 12, se multiplica por -6, entonces:

$$(-3)(-4)(-6) = (12)(-6) = -72$$

Finalmente, el resultado de la multiplicación es -72

2 ¿Cuál es el resultado de $(3)(-5)(-2)(4)$?

Solución

Se multiplican 3 por -5 y -2 por 4, los resultados se vuelven a multiplicar para obtener el resultado final de la operación.

$$(3)(-5)(-2)(4) = (-15)(-8) = 120$$

Por tanto, el producto es 120

EJERCICIO 14

Resuelve los siguientes productos:

1. 3×567	10. $17\,235 \times 111$	19. $(-82\,462)(2\,732)$
2. $4\,846 \times 5$	11. $(-5)(-4)$	20. $(12\,734)(-4\,263)$
3. 85×27	12. $(32)(-5)$	21. $(-5)(-3)(-7)$
4. 324×53	13. $(-14)(-23)$	22. $(3)(-2)(-5)$
5. 272×524	14. $(-324)(48)$	23. $(6)(-1)(-3)$
6. $7\,236 \times 36$	15. $(-723)(-420)$	24. $(5)(4)(-3)(-1)$
7. $4\,005 \times 736$	16. $(840)(-233)$	25. $(-9)(-8)(-3)(4)$
8. $8\,236 \times 5\,274$	17. $(-4\,256)(-3\,023)$	26. $(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)$
9. $9\,821 \times 3\,890$	18. $(-27\,845)(327)$	27. $(4)(-7)(2)(-1)(-5)(-6)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Cada tren del metro de la Ciudad de México tiene 9 vagones, cada uno con 8 puertas y cada una de dos hojas corredizas. Si se desea cambiar las hojas de los 120 trenes existentes en la ciudad, ¿cuántas hojas se van a cambiar?

Solución

Para obtener el número total de hojas, se multiplica el número de trenes por el número de vagones por el número de puertas y por el número de hojas:

$$\text{Número de hojas} = (120)(9)(8)(2) = 17\,280$$

Entonces, el número de hojas a cambiar son 17 280

EJERCICIO 15

Resuelve los siguientes problemas:

1. En una caja hay 24 refrescos, ¿cuántos refrescos habrá en 9 cajas?
2. ¿Cuántos libros hay en 12 repisas, si cada una contiene 15 textos?
3. Juan tiene 3 docenas de canicas, Julio 5 docenas y Daniel tiene sólo 9 canicas, ¿cuántas canicas tienen en total los 3?
4. Se van a sembrar en un terreno 25 filas, cada una con 30 árboles, ¿cuántos árboles se van a plantar en total?
5. Rafael tiene 8 piezas de tela de 12 metros cada una, pretende vender a $10 el metro, ¿cuánto dinero puede obtener por la venta de todas las piezas?
6. ¿Cuántos minutos hay en una semana, si una semana tiene 7 días, cada día tiene 24 horas y cada hora 60 minutos?
7. En un vecindario hay 28 edificios, cada uno tiene 12 departamentos, ¿cuántos departamentos hay en el vecindario?
8. Una caja de lapiceros contiene 20 paquetes, los que a su vez tienen 12 lapiceros cada uno, si hay 25 cajas, ¿cuántos lapiceros se tienen en total?
9. Rodrigo percibe un sueldo quincenal de $2 700, ¿cuánto dinero recibe al cabo de un año?
10. Un autobús tiene capacidad para 42 pasajeros y un conductor, si a un evento asisten 3 grupos de 5 autobuses y cada uno se llena a su máxima capacidad, ¿cuántas personas en total asisten a dicho evento?
11. Una empresa de productos lácteos ocupa, para vender y distribuir leche, camiones con una capacidad de carga de 250 cajas, cada una de ellas contiene 12 litros y el precio del litro es de $10, si un supermercado realiza un pedido de 4 cargas, ¿cuánto debe pagar por la compra del lácteo a la empresa?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación con signos de agrupación

Los signos de agrupación que se utilizan son: ( ), [ ], { }, $\overline{\quad\quad}$; cuyos nombres respectivamente son: paréntesis, corchetes, llaves y vínculo.

Para simplificar y obtener el resultado de una operación con signos de agrupación, hay que suprimir éstos y multiplicar los números del interior de los signos por el número o signo que los anteceden.

Después se agrupan y suman los números del mismo signo y los resultados se restan.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa $3(4-2)-5(1-4)-(8+9)$.

Solución

Los signos de agrupación se suprimen al multiplicar por los números y signos que les anteceden.

$$3(4-2)-5(1-4)-(8+9)=12-6-5+20-8-9$$

Se agrupan y suman los números con el mismo signo, los resultados se restan:

$$\begin{aligned}&=12+20-6-5-8-9\\&=32-28\\&=4\end{aligned}$$

Por tanto, el resultado de la operación es 4

2 Realiza $-6-\overline{-2-7}+(2-1)$.

Solución

Se realizan las operaciones en el paréntesis y en el vínculo (barra horizontal que abarca a -2 y -7). Se suprimen los signos de agrupación y se efectúan las operaciones para obtener el resultado.

$$\begin{aligned}-6-\overline{-2-7}+(2-1)&=-6-\overline{-9}+(1)\\&=-6-(-9)+1\\&=-6+9+1\\&=4\end{aligned}$$

3 ¿Cuál es el resultado de $6-4\{2-5(4-3)+3(3-2)\}$?

Solución

En este caso, primero se suprimen los paréntesis y los números se multiplican por los números que les anteceden:

$$6-4\{2-5(4-3)+3(3-2)\}=6-4\{2-20+15+9-6\}$$

Ahora, se eliminan las llaves al multiplicar por -4,

$$=6-8+80-60-36+24$$

Por último, se realiza la operación al agrupar signos iguales y los resultados obtenidos se restan:

$$\begin{aligned}&=6+80+24-8-60-36\\&=110-104\\&=6\end{aligned}$$

4 Obtén el resultado de $-8-\{2-3[5-2(1-3)+4(8-10)]\}+3[2-5(1-3)-10]$.

Solución

Otra forma de realizar operaciones con signos de agrupación es, primero, efectuar las sumas o restas que encierran los signos con menor cantidad de números, en este caso son los paréntesis.

$$-8-\{2-3[5-2(1-3)+4(8-10)]\}+3[2-5(1-3)-10]=-8-\{2-3[5-2(-2)+4(-2)]\}+3[2-5(-2)-10]$$

Para eliminar los paréntesis se multiplica por el número que los antecede:

$$=-8-\{2-3[5+4-8]\}+3[2+10-10]$$

Ahora los signos a eliminar son los corchetes, para hacerlo se realizan las sumas y restas que encierran, y posteriormente las multiplicaciones:

$$= -8 - \{2 - 3[1]\} + 3[2]$$
$$= -8 - \{2 - 3\} + 6$$

Se sigue el mismo procedimiento para eliminar las llaves:

$$= -8 - \{-1\} + 6$$
$$= -8 + 1 + 6$$
$$= -8 + 7$$
$$= -1$$

Por consiguiente, el resultado de la operación propuesta es -1

EJERCICIO 16

Realiza las siguientes operaciones:

1. $2(7 - 4) + 3(1 - 5) + 8$
2. $-4(2 - 3 - 1) + 2(8 - 5) + 3(4 - 5)$
3. $-6 + \{3 - [4 - 2(4 - 7)]\}$
4. $8 - \{5 - 4[-6 + 7(5 - 2)] - 3\}$
5. $-\{-6 + 4[2 - 5(4 - 3(4 - 3) + 2(7 - 3))] + 2\} - 1$
6. $6 - [4 - 3(4 - 2)] - \{7 - 5[4 - 2(7 - 1)]\}$
7. $-2 + \{-3 - [7 + 4(-2 + 5)]\} - 4$
8. $12 + 3\{-6 + 2[5 - 4(3 - 2) + 5(7 - 8)] - 5\}$
9. $-2(-7 + 11) - 5 - \{-2 + (-3 + 5) - [4 - (2 + 3)]\}$
10. $-11 + 7 - 2\{-4 + 1 - [-2(-3 + 4) - 2 + \overline{4 + 7} - 8] - 4\}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 El costo y la disponibilidad de boletos para un concierto en el centro de espectáculos "El Huracán" es: preferente A: 224 a $840, preferente B 184 a $650, balcón C 125 a $430 y balcón D 96 a $280. Si para el día del evento se agotaron los boletos, ¿cuál es el ingreso de las entradas?

Solución

Se multiplica el número de boletos por el costo de cada boleto de cada sección, al final se suman los resultados y se obtiene el ingreso total de entradas.

$$\text{Ingreso total} = (840)(224) + (650)(184) + (430)(125) + (280)(96)$$
$$= 188\,160 + 119\,600 + 53\,750 + 26\,880$$
$$= 388\,390$$

Por tanto, el ingreso total fue de $388 390

2 Se desea realizar un viaje a Huatulco, 4 días y 3 noches todo incluido, y se tienen contempladas 232 personas, el costo por persona es de $780 en habitación doble y $865 en habitación individual. Si sólo 15 personas no realizan el viaje y se sabe que se alquilaron 75 habitaciones dobles, ¿cuántas habitaciones individuales se alquilaron y cuál fue el monto total del viaje?

Solución

El número de personas que realizaron el viaje son: 232 − 15 = 217

De ellas se hospedaron en habitación doble 2(75) = 150
Esto indica que en habitación individual se hospedaron 217 − 150 = 67
Luego, todos se hospedaron 3 noches,
3(780)(150) + 3(865)(67) = 351 000 + 173 865 = 524 865
Por tanto, el monto total del viaje es de $524 865

3 Una familia de 5 miembros asiste a un restaurante de comida rápida que en todos sus paquetes tiene descuentos; el padre y la madre compran cada quien paquetes de $52, con un descuento de $15. Los niños piden cada uno paquetes de $42, con un descuento de $10 por paquete. ¿Cuánto es lo que pagan por todos los paquetes?

Solución

Para obtener el resultado se multiplica el número de paquetes por el costo de éstos, ya incluido el descuento.

$$\begin{aligned} 2(52-15)+3(42-10) &= 2(37)+3(32) \\ &= 74+96 \\ &= 170 \end{aligned}$$

Por consiguiente, los padres pagan $170

EJERCICIO 17

Resuelve los siguientes problemas:

1. Karen recibe un salario de $850 semanales y, por ser una buena estudiante, tiene asignada una beca de $1 000 mensuales. ¿Cuál es la cantidad de dinero que recibe en un mes? (Considera un mes igual a 4 semanas.)
2. A Maritza le da su papá $20 diarios. Si en un año ella destina para pasajes y diversión $2 300 anuales, ¿qué cantidad de dinero le sobra para sus otros gastos? (Considera un año igual a 365 días.)
3. Un cuarteto de músicos recibe como pago $240 diarios por tocar entre semana en un restaurante, mientras que por tocar en el mismo lugar los fines de semana el pago es de $480 diarios. ¿Cuánto dinero percibe cada integrante del grupo, si lo que ganan se reparte en forma equitativa? (Considera una semana igual a 7 días.)
4. El sueldo de un capturista de datos es de $150 diarios con su respectivo descuento de $30 por concepto de impuestos. ¿Qué cantidad recibe en un mes? (Considera un mes igual a 30 días.)
5. En la repartición de una herencia el abuelo designa en partes iguales un terreno de 12 hectáreas a 3 de sus nietos, si el precio por metro cuadrado es de $250, ¿cuál es el monto que recibió cada uno de los herederos? (Considera una hectárea igual a 10 000 m^2.)
6. Roberto tiene 12 años, Mónica es 4 años más grande que Roberto y Julián tiene el doble de la edad de Mónica. ¿Cuánto es la suma de las edades de Roberto, Mónica y Julián?
7. Pablo asistió a las ofertas de una tienda departamental y se compró 3 pantalones en $750 cada uno, con un descuento de $225 por prenda; 4 camisas de $600 la pieza con su respectivo descuento de $120 por camisa y 5 playeras cuyas etiquetas marcaban un costo de $250 y su descuento de $75 en cada pieza, ¿cuánto pagó Pablo por los artículos?
8. Un granjero realiza la venta de media docena de borregos, 8 conejos y 3 cerdos: si el precio de un borrego es de $600, el de un conejo $150 y el de un cerdo es de $450, ¿cuál es el importe que recibe por la venta de estos animales?
9. La hipoteca que contrajo Damián en enero de 2008 con un banco asciende a $425 000, si durante el primer año Damián realiza el pago de $6 500 mensuales, ¿a cuánto asciende su deuda para enero de 2009?
10. En un estadio hay 3 tipos de ubicaciones con diversos costos cada una: 25 000 en preferente especial, 15 000 lugares en la sección de preferente y 30 000 en general, si el costo de un boleto en preferente especial es de $150, el de preferente $100 y el de general de $80, ¿cuál es el ingreso de la taquilla si hay un lleno total en el estadio?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División

Si a y b son números enteros, la división de a entre b, siendo b un número entero diferente de cero, consiste en encontrar a los números enteros p y r tales que:

$$a = b\,p + r \qquad \text{Para todo } a > b \quad \text{y} \quad b < r.$$

Donde a recibe el nombre de dividendo, b el de divisor, p el de cociente y r residuo.

Ejemplo

En la división de 25 entre 4, el cociente es 6 y el residuo, 1 ya que:

$$25 = 4(6) + 1$$

Ejemplo

En la división de 36 entre 9, el cociente es 4 y el residuo es 0, ya que:

$$36 = 9(4) + 0$$

Cuando en una división el residuo es igual a 0, entonces se dice que la división es exacta.

Las divisiones se representan con los siguientes símbolos:

Con una caja divisora $\overline{\big)\quad}$

Por medio de dos puntos 9 : 7

Con el signo ÷

Con una raya horizontal (fracción) $\frac{24}{8}$

Algoritmo de la división

Para dividir a entre b con $a > b$, se efectúan los siguientes pasos:

1. Se acomoda el dividendo dentro de la caja divisora y el divisor fuera de ella.

$$\text{Divisor} \longrightarrow b\overline{\big)a} \longleftarrow \text{dividendo}$$

2. Del dividendo se toman las cifras necesarias para formar un número mayor o igual que el divisor.
3. El dividendo parcial se divide entre el divisor y resulta la primera cifra del cociente, que se coloca encima de la última cifra del dividendo parcial, enseguida se multiplica la primera cifra del cociente por el divisor y el producto se resta del dividendo parcial y se escribe la diferencia debajo del dividendo parcial.
4. A la derecha de la diferencia se baja la siguiente cifra del dividendo original, con lo que se forma un nuevo dividendo parcial al que se le repite el proceso descrito.
5. Se continúa con el proceso hasta bajar todas las cifras del dividendo original.
6. Si algún dividendo parcial resulta ser menor que el divisor, se escribe cero en el cociente y se baja la siguiente cifra del dividendo original.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Divide 9 entre 4.

Solución

Se acomodan las cantidades en la caja divisora.

$$4\overline{\big)9}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se busca un número que al multiplicar por 4 se aproxime a 9 sin excederlo ($4 \times 2 = 8$), de forma que la diferencia del dividendo 9 y el producto 8 sea menor que 4

$$\begin{array}{rl} & 2 \\ 4 & \overline{)\,9} \\ & \;\,1 \end{array}$$

Por tanto, el cociente es igual a 2 y el residuo 1

2 Efectúa la división de 47 entre 3.

Solución

Se colocan el dividendo y el divisor en la caja divisora, en sus respectivos lugares.

$$3\,\overline{)\,47}$$

Se elige un dividendo parcial y se efectúa la operación.

$$\begin{array}{rl} & 1 \\ 3 & \overline{)\,4,7} \\ & 1 \end{array}$$

Se baja la siguiente cifra del dividendo original y se divide entre 3 nuevamente.

$$\begin{array}{rl} & 1\;5 \\ 3 & \overline{)\,4,7} \\ & 1\;7 \\ & \;\;\;2 \end{array}$$

El resultado de la división es 15 y el residuo 2

3 Efectúa $23\,\overline{)\,1\;217}$.

Solución

Se elige el dividendo parcial y se efectúa la operación.

$$\begin{array}{rl} & \;\;\;5 \\ 23 & \overline{)\,121,7} \\ & \;\;06 \end{array}$$

Se baja la siguiente cifra del dividendo original y se divide nuevamente para obtener el resultado de la división propuesta.

$$\begin{array}{rl} & \;\;\;5\;2 \\ 23 & \overline{)\,121,7} \\ & \;\;06\;7 \\ & \;\;\;\;2\;1 \end{array}$$

Por consiguiente, el cociente es 52 y el residuo 21

4 Divide 65 975 entre 325.

Solución

Se acomodan los números en la caja divisora.

$$325\,\overline{)\,65\;975}$$

Se elige el dividendo parcial y se efectúa la operación.

$$\begin{array}{rl} & \;\;\;2 \\ 325 & \overline{)\,659,75} \\ & 009 \end{array}$$

Al bajar la siguiente cifra, el nuevo dividendo parcial 97 es menor que el divisor 325.

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 325 & 659{,}75 \\ & 009\ 7 \end{array}$$

Por lo tanto, en el cociente se escribe 0 a la derecha de 2 y se baja la última cifra del dividendo original.

$$\begin{array}{r|l} & 2\ 0 \\ \hline 325 & 659{,}75 \\ & 009\ 75 \end{array}$$

Se efectúa la división de 975 entre 325 y se obtiene el resultado.

$$\begin{array}{r|l} & 2\ 03 \\ \hline 325 & 659{,}75 \\ & 009\ 75 \\ & \quad 0\ 00 \end{array}$$

Por tanto, el cociente es 203 y el residuo 0, la división fue exacta.

EJERCICIO 18

Realiza las siguientes divisiones.

1. $3\overline{)8}$
2. $5\overline{)16}$
3. $7\overline{)343}$
4. $9\overline{)2\ 674}$
5. $12\overline{)96}$
6. $18\overline{)236}$
7. $23\overline{)485}$
8. $35\overline{)1\ 216}$
9. $125\overline{)3\ 724}$
10. $853\overline{)4\ 296}$
11. $526\overline{)15\ 396}$
12. $903\overline{)42\ 874}$
13. $1\ 205\overline{)63\ 472}$
14. $4\ 621\overline{)80\ 501}$
15. $12\ 503\overline{)120\ 973}$
16. $42\ 524\overline{)3\ 123\ 274}$
17. $10\ 053\overline{)2\ 000\ 382}$
18. $22\ 325\overline{)110\ 121\ 874}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

En el auditorio de una escuela se presenta una obra de teatro para maestros y alumnos. Si en la escuela hay 28 maestros y 585 alumnos, y el auditorio sólo tiene capacidad para 80 personas, ¿cuántas presentaciones se deben realizar para que todo el alumnado y todos los profesores la presencien?

Solución

En total hay 28 + 585 = 613 personas; luego, se realiza una división entre el total de personas y la capacidad del auditorio para obtener el número de presentaciones.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 7 \\ \hline 80 & 613 \\ & \ 53 \end{array}$$

Se observa que el cociente 7 representa al número de presentaciones con auditorio lleno, pero sobran 53, entonces se necesita una presentación más para que todos puedan asistir a la obra de teatro. Por lo tanto, se tienen que realizar 8 presentaciones.

EJERCICIO 19

Resuelve los siguientes problemas:

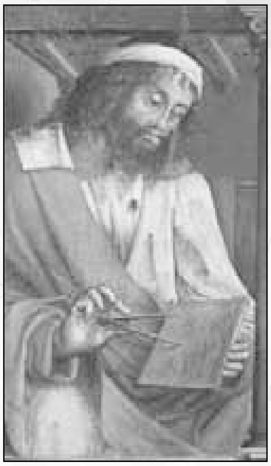
1. ¿Cuántas veces cabe el número 15 en 345?
2. Ciento ochenta y seis mil pesos es lo que ahorraron 62 alumnos del Tecnológico de ingeniería para su graduación, si cada estudiante ahorró la misma cantidad, ¿cuánto dinero ahorró cada uno?
3. El producto de 2 números es 137 196, uno de ellos es 927, ¿cuál es el otro número?
4. ¿Cuántas horas hay en 3 360 minutos, si se sabe que una hora tiene 60 minutos?
5. Se reparten 7 200 libros de matemáticas a 4 escuelas, si cada una de ellas tiene 600 alumnos, ¿cuántos libros le tocan a cada estudiante?
6. ¿En cuántas horas recorrerá 144 kilómetros un automóvil que viaja a 16 kilómetros por hora?
7. ¿Cuántos días necesitará Fabián para capturar en su computadora los datos de un libro de matemáticas que contiene 224 páginas, si copia 4 páginas en una hora y trabaja 8 horas por día?
8. Un reloj se adelanta 3 minutos cada 4 horas, ¿cuánto se habrá adelantado al cabo de 20 horas?
9. Una fuente tiene capacidad para 2 700 litros de agua, ¿qué cantidad de este líquido debe echar por minuto una llave que la llena en 5 horas?
10. En una tienda de ropa, Omar compra igual número de pantalones que de chamarras con un costo total de $1 500, cada pantalón cuesta $200 y cada chamarra $550, ¿cuántos pantalones y chamarras compró?
11. Los 3 integrantes de una familia deciden repartir los gastos que se generan en su casa: el recibo bimestral de luz llega de $320; el recibo del teléfono de $240 mensuales; la televisión por cable $260 mensuales y el predio es de $3 600 anuales. ¿Cuánto dinero le toca aportar mensualmente a cada integrante, si los gastos se reparten de manera equitativa?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 3

Teoría de números

Reseña HISTÓRICA



Euclides es el matemático más famoso de la Antigüedad y quizá también el más nombrado y conocido de la historia de las matemáticas.

Su obra más importante es un tratado de geometría y aritmética que recibe el título de *Los elementos*.

Esta obra es importante, no tanto por la originalidad de sus contenidos, sino por la sistematización, el orden y la argumentación con la que fue redactada. Euclides recopila, ordena y argumenta los conocimientos geométrico-matemáticos de su época, que ya eran muchos.

Los elementos consta de 13 libros sobre geometría y aritmética, de los cuales sólo los libros del VII al IX tratan la teoría de los números (aritmética), discuten relaciones con números primos (Euclides prueba ya en un teorema que no hay una cantidad finita de números primos), mínimo común múltiplo, progresiones geométricas, etcétera.

Euclides
(300 a. C)

Divisibilidad

Sean a y b números enteros. Se dice que a es divisible entre b si el residuo de $a \div b$ es cero.

Ejemplos

48 es divisible entre 16, porque 48 = (16)(3) + 0, es decir,

$$\begin{array}{rr l}
 & 3 & \\
16 & \overline{)48} & \\
 & 0 & \longrightarrow \text{Residuo}
\end{array}$$

1 512 es divisible entre 42, porque 1 512 = (42)(36) + 0, entonces,

$$\begin{array}{rr l}
 & 36 & \\
42 & \overline{)1\,512} & \\
 & 252 & \\
 & 0 & \longrightarrow \text{Residuo}
\end{array}$$

385 no es divisible entre 12, porque 385 = (12)(32)+ 1, es decir, el residuo es diferente de 0

$$\begin{array}{rr l}
 & 32 & \\
12 & \overline{)385} & \\
 & 25 & \\
 & 1 & \longrightarrow \text{Residuo}
\end{array}$$

Múltiplo. El múltiplo de un número es el que lo contiene un número exacto de veces.

Ejemplos

36 es múltiplo de 9, porque lo contiene 4 veces.
240 es múltiplo de 12, porque lo contiene 20 veces.
Los múltiplos de un número k se obtienen al multiplicar k por los números naturales.

Ejemplos

Los múltiplos de 3 son: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, … , porque 3(1) = 3, 3(2) = 6, 3(3) = 9, 3(4) = 12, 3(5) = 15, 3(6) = 18, ...
Los múltiplos de 5 son: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, … , porque 5(1) = 5, 5(2) = 10, 5(3) = 15, 5(4) = 20, 5(5) = 25, 5(6) = 30, ...
Los múltiplos de 8 son: 8, 16, 24, 32, 40, 48, … , porque 8(1) = 8, 8(2) = 16, 8(3) = 24, 8(4) = 32, 8(5) = 40, 8(6) = 48, ...

Número compuesto. Es aquel que además de ser divisible entre sí mismo y la unidad, lo es entre otro factor.

Ejemplos

12 es número compuesto, porque tiene como divisores al: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.
28 es número compuesto, porque tiene como divisores al: 1, 2, 4, 7, 14 y 28.

Criterios de divisibilidad

Nos permiten visualizar cuándo un número es divisible entre otro sin efectuar la división. A continuación se enuncian algunos de ellos:

- **Divisibilidad entre 2.** Un número entero es divisible entre 2 si termina en 0, 2, 4, 6 u 8, los números divisibles entre 2 se llaman pares.

Ejemplo

20, 12, 114, 336, 468 son divisibles entre 2, ya que terminan en 0, 2, 4, 6 y 8, respectivamente.

- **Divisibilidad entre 3.** Un número entero es divisible entre 3, si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 3.

Ejemplos

51 es divisible entre 3, ya que 5 + 1 = 6 y 6 es múltiplo de 3.
486 es divisible entre 3, ya que 4 + 8 + 6 = 18 y 18 es múltiplo de 3.

- **Divisibilidad entre 4.** Un número entero es divisible entre 4, si sus últimos 2 dígitos son 0 o un múltiplo de 4.

Ejemplos

900 es divisible entre 4, porque termina en doble 0.
628 es divisible entre 4, porque 28 es múltiplo de 4.

- **Divisibilidad entre 5.** Un número entero es divisible entre 5, si su último dígito es 0 o 5.

Ejemplo

5 215 y 340 son divisibles entre 5, ya que terminan en 5 y 0 respectivamente.

- **Divisibilidad entre 6.** Un número entero es divisible entre 6, si a su vez es divisible entre 2 y 3.

Ejemplos

216 es divisible entre 2, ya que termina en 6, y es divisible entre 3, porque la suma de sus dígitos es múltiplo de 3. Por tanto, 216 es divisible entre 6.
9 000 es divisible entre 6, ya que es divisible entre 2 y 3.

- **Divisibilidad entre 7.** Un número entero es divisible entre 7, cuando al multiplicar el último dígito por 2 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o un múltiplo de 7.

Ejemplos

315 es divisible entre 7, ya que $5 \times 2 = 10$ y $31 - 10 = 21$ y 21 es múltiplo de 7.
147 es divisible entre 7, porque $7 \times 2 = 14$ y $14 - 14 = 0$.

- **Divisibilidad entre 8.** Un número entero es divisible entre 8, cuando sus 3 últimos dígitos de la derecha son 0 o forman un múltiplo de 8.

Ejemplos

6 000 es divisible entre 8, ya que sus últimos 3 dígitos son 0.
3 160 es divisible entre 8, porque los 3 últimos dígitos, 160, forman un múltiplo de 8.

- **Divisibilidad entre 9.** Un número entero es divisible entre 9, si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 9.

Ejemplos

1 233 es divisible entre 9, ya que 1 + 2 + 3 + 3 = 9, y 9 es múltiplo de 9.
6 786 es divisible entre 9, ya que 6 + 7 + 8 + 6 = 27, y 27 es múltiplo de 9.

- **Divisibilidad entre 10.** Un número entero es divisible entre 10, si el último dígito es 0.

Ejemplos

360 es divisible entre 10, porque su último dígito es 0.
2 500 es divisible entre 10, ya que termina en 0.

- **Divisibilidad entre 11.** Un número entero es divisible entre 11, si el valor absoluto de la diferencia entre la suma de los dígitos en posición par y la suma de los dígitos en posición impar es 0 o múltiplo de 11.

Ejemplos

1 364 es divisible entre 11, ya que $|(3+4)-(1+6)| = |7-7| = |0| = 0$.

82 918 es divisible entre 11, porque $|(2+1)-(8+9+8)| = |3-25| = |-22| = 22$, y 22 es múltiplo de 11.

- **Divisibilidad entre 13.** Un número entero es divisible entre 13, si al multiplicar el último dígito por 9 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o múltiplo de 13.

Ejemplos

273 es divisible entre 13, ya que $27-(3\times 9)=27-27=0$.
442 es divisible entre 13, porque $44-(2\times 9)=44-18=26$, y 26 es múltiplo de 13.

- **Divisibilidad entre 17.** Un número entero es divisible entre 17, si al multiplicar el último dígito por 5 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o múltiplo de 17.

Ejemplos

357 es divisible entre 17, ya que $35-(7\times 5)=35-35=0$.
493 es divisible entre 17, porque $49-(3\times 5)=49-15=34$, y 34 es múltiplo de 17.

- **Divisibilidad entre 19.** Un número entero es divisible entre 19, si al multiplicar el último dígito por 17 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o múltiplo de 19.

Ejemplos

342 es divisible entre 19, ya que $34-(2\times 17)=34-34=0$.
1 045 es divisible entre 19, porque $104-(5\times 17)=104-85=19$, y 19 es múltiplo de 19.

EJERCICIO **20**

De los siguientes números:

1. 105, 243, 73, 2 457, 3 589, ¿cuáles son divisibles entre 3?
2. 800, 112, 324, 1 426, 13 564, ¿cuáles son divisibles entre 4?
3. 105, 3 176, 8 910, 34 615, 217 583, ¿cuáles son divisibles entre 5?
4. 80, 78, 314, 768, 1 470, ¿cuáles son divisibles entre 6?
5. 175, 157, 576, 1 645, 3 528, ¿cuáles son divisibles entre 7?
6. 700, 3 128, 5 024, 9 000, 10 018, ¿cuáles son divisibles entre 8?
7. 225, 349, 1 008, 2 925, 23 619, ¿cuáles son divisibles entre 9?
8. 66, 111, 253, 935, 540, ¿cuáles son divisibles entre 11?
9. 195, 315, 540, 713, 1 105, ¿cuáles son divisibles entre 13?
10. 1 007, 1 062, 380, 719, 1 596, ¿cuáles son divisibles entre 19?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Números primos

Un número primo sólo es divisible entre sí mismo y la unidad. El 1, por definición, no es primo.

Ejemplos

7 es número primo porque sólo es divisible entre sí mismo y la unidad.
15 no es número primo, ya que además de ser divisible entre sí mismo y la unidad, también lo es entre 3 y 5.

Tabla de números primos. Para obtener los primeros *n* números primos de los números naturales se puede utilizar la criba de Eratóstenes, la cual consiste en hacer una tabla con los números del 1 hasta *n*.

El procedimiento es señalar con un paréntesis los números que sean primos y tachar los que no lo sean. Se empieza por tachar el 1 y escribir entre paréntesis el 2, a continuación se tachan los múltiplos de 2, posteriormente se busca el primer número no tachado, en este caso (3), se pone entre paréntesis y se tachan todos sus múltiplos. El procedimiento se sigue hasta tener marcados todos los números.

Criba de Eratóstenes

~~1~~	(2)	(3)	~~4~~	(5)	~~6~~	(7)	~~8~~	~~9~~	~~10~~
(11)	~~12~~	(13)	~~14~~	~~15~~	~~16~~	(17)	~~18~~	(19)	~~20~~
~~21~~	~~22~~	(23)	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	(29)	~~30~~
(31)	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	(37)	~~38~~	~~39~~	~~40~~
(41)	~~42~~	(43)	~~44~~	~~45~~	~~46~~	(47)	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	(53)	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	(59)	~~60~~
(61)	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	(67)	~~68~~	~~69~~	~~70~~
(71)	~~72~~	(73)	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	(79)	~~80~~
~~81~~	~~82~~	(83)	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	(89)	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	(97)	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Por tanto, los números primos entre 1 y 100 son:

$$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97\}$$

Descomposición de un número en sus factores primos

La descomposición de un número en sus factores primos es su expresión como el producto de sus factores primos. Para obtenerlo, se divide el número entre el menor divisor primo posible, el cociente que se obtiene se vuelve a dividir entre el menor divisor primo posible, y así hasta que el último cociente sea 1, este procedimiento también se conoce como factorización completa de un número.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa 144 como el producto de sus factores primos.

Solución

Se divide 144 entre 2, el cociente 72, se vuelve a dividir entre 2, y así sucesivamente.

$$\begin{aligned} 144 \div 2 &= 72 \\ 72 \div 2 &= 36 \\ 36 \div 2 &= 18 \\ 18 \div 2 &= 9 \\ 9 \div 3 &= 3 \\ 3 \div 3 &= 1 \end{aligned}$$

144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Por tanto, $144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

2 Expresa 105 como el producto de sus factores primos.

Solución

105 se divide entre 3 y se continúa con el procedimiento.

$$\begin{aligned} 105 \div 3 &= 35 \\ 35 \div 5 &= 7 \\ 7 \div 7 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Por consiguiente, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

3 Encuentra la factorización completa de 294.

Solución

294 se divide entre 2 y se continúa con el procedimiento.

$$\begin{aligned} 294 \div 2 &= 147 \\ 147 \div 3 &= 49 \\ 49 \div 7 &= 7 \\ 7 \div 7 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{array}{r|l} 294 & 2 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Entonces, la factorización completa de 294 es $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$

EJERCICIO 21

Realiza la descomposición en sus factores primos de los siguientes números:

1. 72	4. 576	7. 840	10. 2 376	13. 30 240
2. 96	5. 945	8. 2 310	11. 7 020	14. 16 200
3. 225	6. 210	9. 3 675	12. 29 400	15. 30 030

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Máximo común divisor (MCD)

Es el mayor de los divisores en común de 2 o más números.

Ejemplo

Los divisores de 18 y 24 son:

Divisores de 18: 1, 2, 3, 6, 9 y 18
Divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24
Los divisores comunes son: 1, 2, 3 y 6, el mayor de los divisores en común es el 6

Por tanto, el máximo común divisor de 18 y 24 es 6

Para calcular el MCD de varios números se descomponen simultáneamente en sus factores primos, hasta que ya no tengan un divisor primo en común. Cuando los números sólo tienen a la unidad como común divisor, los números reciben el nombre de “primos relativos”.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el máximo común divisor de 48, 36 y 60.

Solución

Se descomponen simultáneamente en factores primos.

48	36	60	2
24	18	30	2
12	9	15	3
4	3	5	

4, 3 y 5, no tienen divisores primos en común, los números primos obtenidos se multiplican y el producto es el resultado.

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Por consiguiente, el máximo común divisor de 48, 36 y 60 es 12.

2 Determina el MCD(72,180).

Solución

Se realiza la descomposición de 72 y 180, en sus factores primos.

72	180	2
36	90	2
18	45	3
6	15	3
2	5	

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$

Por tanto, el MCD(72,180) = 36

3 Calcula el MCD(11,23).

Solución

Los números sólo tienen a la unidad como común divisor, lo cual quiere decir que 11 y 23 son primos relativos.

Por consiguiente, el MCD(11,23) = 1

4 Encuentra el máximo común divisor de 234, 390 y 546.

Solución

Se descomponen simultáneamente en factores primos.

234	390	546	2
117	195	273	3
39	65	91	13
3	5	7	

$$2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$$

Por consiguiente, el máximo común divisor de 234, 390 y 546 es 78

EJERCICIO 22

Calcula el MCD de los siguientes números:

1. 108 y 72
2. 270 y 900
3. 243 y 125
4. 60, 72 y 150
5. 27, 25 y 28
6. 80, 675 y 900
7. 216, 300 y 720
8. 126, 210 y 392
9. 308, 1 617 y 1 925
10. 572, 4 719 y 7 865

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Mínimo común múltiplo (mcm)

El mínimo común múltiplo es el menor de todos los múltiplos comunes de 2 o más números.

Ejemplo

Al obtener los múltiplos de 4 y 6 se tiene:

Múltiplos de 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, …
Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, …
Los múltiplos comunes son: 12, 24, 36, 48, …
El menor de todos los múltiplos en común es 12

Por tanto, el mínimo común múltiplo de 4 y 6 es 12

Para calcular el mcm de varios números se descomponen simultáneamente en factores primos hasta que los cocientes sean 1, si alguno de los números no es divisible entre el factor dado, se baja y se continúa hasta encontrar el factor primo que lo divida.

EJEMPLOS

1 Determina el mcm [28,42].

Solución

Se descomponen ambos números en factores primos

28	42	2
14	21	2
7	21	3
7	7	7
1	1	

$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

Por consiguiente, el mcm [28,42] es 84

2 Determina el mcm [25,30,150].

Solución

Se descomponen los números en factores primos

25	30	150	2
25	15	75	3
25	5	25	5
5	1	5	5
1	1	1	

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 150$

Por tanto, el mcm [25,30,150] es 150

3 Calcula el mínimo común múltiplo de 36, 48 y 60.

Solución

Se descomponen simultáneamente en factores primos y los números primos que resultan se multiplican.

36	48	60	2
18	24	30	2
9	12	15	2
9	6	15	2
9	3	15	3
3	1	5	3
1	1	5	5
1	1	1	

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 720$

Entonces el mcm de 36, 48 y 60 es 720

EJERCICIO 23

Calcula el mcm de los siguientes números:

1. 108 y 72
2. 18 y 45
3. 27 y 16
4. 36, 20 y 90
5. 45, 54 y 60
6. 28, 35 y 63
7. 20, 30 y 50
8. 720, 600 y 540
9. 220, 275 y 1 925
10. 605, 1 925 y 2 695

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 En una reunión de academia del área de matemáticas se repartieron 18 bocadillos, 24 vasos con refresco y 12 rebanadas de pastel, ¿cuántos profesores asistieron a la reunión y qué cantidad de bocadillos, vasos con refresco y rebanadas de pastel recibió cada uno?

Solución

Se calcula el máximo común divisor de 18, 24 y 12

18	24	12	2
9	12	6	3
3	4	2	

$\text{MCD}(18,24,12) = 2 \cdot 3 = 6$

Por consiguiente, a la reunión de academia asistieron 6 profesores y a cada uno le tocó 3 bocadillos, 4 vasos con refresco y 2 rebanadas de pastel.

2 Tres escuelas deciden hacer una colecta de dinero entre sus alumnos para donar a varias instituciones de beneficencia. Si la primera junta 120 mil, la segunda 280 mil y la tercera 360 mil pesos, ¿cuál es la mayor cantidad que recibirá cada institución de tal manera que sea la misma y cuántas instituciones podrán ser beneficiadas?

Solución

Se calcula el máximo común divisor de 120, 280 y 360

120	280	360	2
60	140	180	2
30	70	90	2
15	35	45	5
3	7	9	

$$\text{MCD}(120, 280, 360) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$$

Cada institución recibirá 40 mil pesos y el número de instituciones beneficiadas será la suma de los residuos $3 + 7 + 9 = 19$.

Por tanto, 19 son las instituciones beneficiadas y cada una recibirá $40 000.

3 Al hacer el corte del día en un restaurante, el administrador hace 3 rollos de billetes de la misma denominación, en el primero hay $1 350, en el segundo $1 700 y en el tercero $3 550, ¿cuántos billetes hay en cada rollo y de qué denominación son?

Solución

Se calcula el máximo común divisor de 1 350, 1 700 y 3 550

1 350	1 700	3 550	2
675	850	1 775	5
135	170	355	5
27	34	71	

$$\text{MCD}(1\,350, 1\,700, 3\,550) = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$$

La denominación de cada billete es de $50, en el primer rollo hay 27 billetes, en el segundo 34 y en el tercero 71.

4 Una persona viaja a la Ciudad de México cada 12 días, otra lo hace cada 20 días y una tercera cada 6 días. Si hoy han coincidido en estar las 3 en la ciudad, ¿dentro de cuántos días, como mínimo, volverán a coincidir?

Solución

Se calcula el mínimo común múltiplo de 12, 20 y 6

12	20	6	2
6	10	3	2
3	5	3	3
1	5	1	5
1	1	1	

El mínimo común múltiplo es: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Por tanto, el mínimo de días que trascurrirán para que las 3 personas coincidan en la Ciudad de México es de 60 días.

5 Un médico receta a un paciente tomar una pastilla cada 6 horas y un jarabe cada 8 horas. Si al iniciar el tratamiento toma la pastilla y el jarabe a la misma hora, ¿después de cuántas horas volverá a tomar ambos medicamentos al mismo tiempo?

Solución

Se calcula el mínimo común múltiplo de 6 y 8

6	8	2
3	4	2
3	2	2
3	1	3
1	1	

El mínimo común múltiplo es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.

Entonces transcurrirán 24 horas para que el paciente tome los medicamentos juntos.

EJERCICIO 24

Resuelve las siguientes aplicaciones:

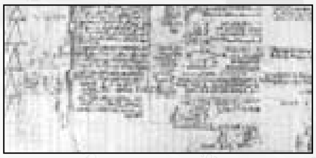
1. Tres cajas contienen, cada una, 12 kilogramos de carne de res, 18 de carne de cerdo y 24 de carne de pollo. La carne de cada caja está contenida en bolsas del mismo tamaño y con la máxima cantidad de carne posible, ¿cuánto pesa cada bolsa y cuántas hay por caja?
2. Gerardo fabrica un anuncio luminoso con focos de color rojo, amarillo y verde, de tal manera que los focos rojos enciendan cada 10 segundos, los amarillos cada 6 y los verdes cada 15, si al probar el anuncio encienden todos los focos a la vez, ¿después de cuántos segundos volverán a encender juntos?
3. Un ebanista quiere cortar en cuadros lo más grande posible una plancha de madera de 300 cm de largo y 80 cm de ancho, ¿cuál debe ser la longitud de los lados de cada cuadro?
4. Un ciclista da una vuelta a una pista en 6 minutos, mientras que otro tarda 4 minutos. Si ambos inician sus recorridos juntos, ¿después de qué tiempo volverán a encontrarse y cuántas vueltas habrán dado cada uno?
5. Una llave vierte 4 litros de agua por minuto, otra 3 y una tercera, 8. ¿Cuál es la cantidad menor de litros que puede tener un pozo para que se llene en un número exacto de minutos por cualquiera de las 3 llaves?
6. Tres rollos de tela de 30, 48 y 72 metros de largo se quieren cortar para hacer banderas con pedazos iguales y de mayor longitud, ¿cuál será el largo de cada pedazo?
7. Un parque de diversiones quiere construir balsas con 3 troncos de palmera, los cuales miden 15, 9 y 6 metros, ¿cuánto deben medir los pedazos de tronco si tienen que ser del mismo tamaño?, ¿cuántos pedazos de troncos saldrán?
8. El abuelo Eduardo da dinero a 3 de sus hijos para que lo repartan a los nietos de manera equitativa. A su hijo Rubén le da $5 000, a su hijo Anselmo le da $6 000, mientras que a Horacio sólo $3 000, ¿cuál es la mayor cantidad de dinero que podrán darle a sus hijos y cuántos nietos tiene Eduardo?
9. Fabián tiene un reloj que da una señal cada 18 minutos, otro que da una señal cada 12 minutos y un tercero cada 42 minutos. A las 11 de la mañana los 3 relojes han coincidido en dar la señal, ¿cuántos minutos como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir?, ¿a qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?
10. Daniel y Omar tienen 60 canicas azules, 45 verdes y 90 amarillas; quieren hacer costalitos iguales con el número mayor de canicas sin que sobren, ¿cuántos costalitos pueden hacer y cuántas canicas tendrá cada uno?
11. Ricardo tiene en su papelería los lapiceros en bolsas. En la caja "A" tiene bolsitas de 30 lapiceros cada una y no sobran, en la caja "B" tiene bolsitas de 25 lapiceros cada una y tampoco sobran. El número de lapiceros que hay en la caja "A" es igual al que hay en la caja "B", ¿cuántos lapiceros como mínimo hay en cada caja?
12. Rosa tiene cubos de color lila de 8 cm de arista y de color rojo de 6 cm de arista. Ella quiere apilar los cubos en 2 columnas, una de cubos de color lila y otra de color rojo, desea conseguir que ambas columnas tengan la misma altura, ¿cuántos cubos, como mínimo, tiene que apilar de cada color?
13. Tres amigos pasean en bicicleta por un camino que rodea a un lago, para dar una vuelta completa, uno de ellos tarda 10 minutos, otro tarda 15 y el tercero, 18 minutos. Parten juntos y acuerdan interrumpir el paseo la primera vez que los 3 pasen simultáneamente por el punto de partida, ¿cuánto tiempo duró el paseo?, ¿cuántas vueltas dio cada uno?
14. En 1994 se realizaron elecciones para presidente y para jefe de gobierno, el periodo presidencial es de 6 años y el de jefe de gobierno de 4. ¿En qué año volverán a coincidir las elecciones?
15. El piso de una habitación tiene 425 cm de largo por 275 cm de ancho, si se desea poner el menor número de mosaicos cuadrados de mármol, ¿cuáles serán las dimensiones máximas de cada mosaico?, ¿cuántos mosaicos se necesitan?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 4

NÚMEROS RACIONALES

Reseña HISTÓRICA



La idea de número racional como relación entre dos enteros fue utilizada por los pitagóricos en el siglo VI a. de C. Años antes, los babilonios y los egipcios utilizaron algunas fracciones, las que tenían como numerador 1, por ejemplo: $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, y algunas en particular como: $\frac{2}{3}$.

Después fueron los hindúes, quienes se encargaron de formalizar las reglas para ejecutar las operaciones entre números fraccionarios. Algunas reglas generales las plantearon Aryabhata, y luego Bramagupta, en los siglos VI y VII, respectivamente. Tiempo después fueron los mismos hindúes quienes se encargaron de sistematizar y ampliar estas reglas. De modo que las reglas que utilizamos en la actualidad para trabajar con fracciones, fueron obra de Mahavira, en el siglo IX, y Bháskara, en el siglo XII.

Durante el siglo XV el matemático persa Al-kashi planteó la escritura decimal de los números fraccionarios y, al mismo tiempo, estableció las reglas de cálculo con los números decimales. En el Occidente cristiano a las fracciones decimales se les conocía como fracciones de los turcos.

Posteriormente a las fracciones equivalentes, que pueden ser simplificadas, se les denominó números racionales, mientras que la fracción siempre será un término que no tiene factores comunes entre el numerador y el denominador, es decir, es irreducible.

Al inicio del papiro de Rhind aparece una tabla en la que se expresan las fracciones de numerador 2 y de denominador impar entre 5 y 101, como suma de fracciones unitarias; con ellas efectuaban las cuatro operaciones aritméticas con fracciones.

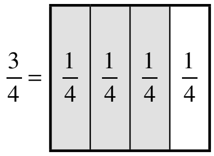
Fracción común

Si a y b son números enteros, y b es diferente de cero, se llama fracción común a la expresión $\frac{a}{b}$, donde a recibe el nombre de numerador y b el de denominador. En una fracción común el denominador indica el número de partes iguales en que se divide la unidad y el numerador indica el número de partes que se toman de la unidad.

EJEMPLOS

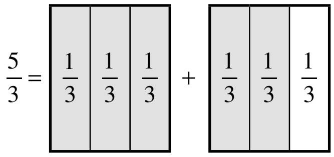
Ejemplos

1 La fracción $\frac{3}{4}$, indica que la unidad se divide en 4 partes iguales, de las cuales se toman únicamente 3, la representación gráfica de esta fracción es:



La parte sombreada de la figura representa al numerador.

2 La fracción $\frac{5}{3}$ indica que la unidad se divide en 3 partes iguales, de las cuales se deben tomar 5, lo cual no es posible. Por lo tanto, se toman 2 unidades y se dividen en 3 partes iguales cada una, de la primera unidad se toman las 3 partes y de la segunda únicamente 2 para completar las 5 partes indicadas en el numerador.



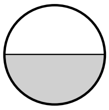
Otra manera de representar la fracción $\frac{5}{3}$ es con un número formado por una parte entera y una parte fraccionaria $1\frac{2}{3}$, este tipo de fracciones reciben el nombre de mixtas.

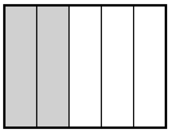
EJERCICIO **25**

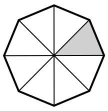
Representa gráficamente las siguientes fracciones:

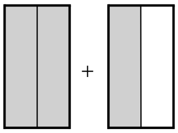
1. $\frac{3}{8}$
2. $\frac{1}{4}$
3. $\frac{3}{5}$
4. $\frac{7}{6}$
5. $\frac{6}{2}$
6. $\frac{9}{4}$

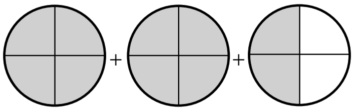
Indica la fracción que representa la parte sombreada de las figuras.

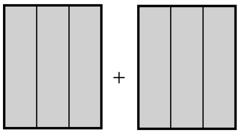
7. 

8. 

9. 

10. 

11. 

12. 

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

En la familia que forman 3 hombres y 4 mujeres, ¿qué fracción de la familia representan las mujeres?

Solución

En este ejemplo la unidad la representa la familia, que a su vez está formada por 7 miembros (3 + 4 = 7), la fracción de la familia que representan las mujeres es el número de ellas dividida entre el total de miembros. Por lo tanto, la fracción es igual a $\frac{4}{7}$.

EJERCICIO 26

Resuelve los siguientes problemas:

1. Una caja tiene 9 pelotas verdes y 5 azules, ¿qué porción de las pelotas que hay en la caja son azules?
2. ¿Qué fracción del día ha transcurrido cuando un reloj marca las 6:00 p.m.?
3. En una caja hay 40 listones rojos y 60 de color amarillo, ¿qué fracción del total de éstos representan los listones rojos y los amarillos?
4. Un obrero trabaja diariamente jornadas de 8 horas, ¿qué fracción del día ocupa para realizar sus otras actividades?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Clasificación

Fracciones propias. Son aquellas que tienen el numerador menor que el denominador.

Ejemplo

Las fracciones $\frac{3}{8}, \frac{5}{6}, -\frac{3}{4}, \frac{8}{21}, \frac{1}{3}$ tienen el numerador menor que el denominador, por lo tanto, son propias.

Fracciones impropias. Son aquellas cuyo numerador es mayor o igual que el denominador.

Ejemplo

Las fracciones $\frac{8}{3}, \frac{6}{5}, -\frac{4}{3}, \frac{21}{8}, \frac{3}{1}$ son impropias, ya que el numerador es mayor que el denominador.

EJERCICIO 27

Identifica las fracciones propias y las impropias.

1. $\frac{7}{8}$
2. $\frac{8}{6}$
3. $\frac{9}{12}$
4. $\frac{12}{16}$
5. $\frac{5}{5}$
6. $\frac{9}{24}$
7. $\frac{16}{9}$
8. $\frac{2}{15}$
9. $\frac{32}{17}$
10. $\frac{53}{7}$
11. $\frac{38}{45}$
12. $\frac{345}{87}$
13. $\frac{345}{435}$
14. $\frac{229}{228}$
15. $\frac{213}{1\,028}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fracciones mixtas. Son aquellas formadas por una parte entera y una parte fraccionaria.

Ejemplo

Las fracciones: $2\frac{1}{3}, 5\frac{3}{4}, 3\frac{2}{3}$ son ejemplos de fracciones mixtas.

Conversiones

Para realizar la conversión de una fracción impropia a mixta se efectúa la división del numerador entre el denominador, el cociente es la parte entera, el residuo es el numerador de la fracción y el divisor es el denominador.

EJEMPLOS

1 Convierte a fracción mixta $\frac{43}{6}$.

Solución

Se efectúa la división:

$$\begin{array}{r} 7 \leftarrow \text{parte entera} \\ \text{denominador} \rightarrow 6\overline{)43} \\ 1 \leftarrow \text{numerador} \end{array}$$

Por lo tanto, la fracción $\frac{43}{6}$ en forma mixta es $7\frac{1}{6}$

2 Expresa en fracción mixta $\frac{125}{12}$.

Solución

Se realiza el cociente:

$$\begin{array}{r} 10 \\ 12\overline{)125} \\ 005 \end{array}$$

se obtiene que $\frac{125}{12} = 10\frac{5}{12}$

EJERCICIO 28

Convierte las siguientes fracciones impropias a fracciones mixtas.

1. $\frac{4}{3}$
2. $\frac{7}{5}$
3. $\frac{3}{2}$
4. $\frac{13}{4}$
5. $\frac{12}{3}$
6. $\frac{13}{8}$
7. $\frac{41}{6}$
8. $\frac{18}{3}$
9. $\frac{27}{7}$
10. $\frac{36}{13}$
11. $\frac{28}{13}$
12. $\frac{25}{12}$
13. $\frac{19}{18}$
14. $\frac{45}{16}$
15. $\frac{131}{40}$
16. $\frac{488}{65}$
17. $\frac{539}{105}$
18. $\frac{1\,258}{305}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para convertir una fracción mixta a impropia se multiplica la parte entera de la fracción mixta por el denominador de la parte fraccionaria y al producto se le suma el numerador.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte a fracción impropia $2\frac{3}{5}$.

Solución

Al aplicar el procedimiento anterior se obtiene:

$$2\frac{3}{5}=\frac{(2\times 5)+3}{5}=\frac{10+3}{5}=\frac{13}{5}$$

Por consiguiente, $2\frac{3}{5}=\frac{13}{5}$

2 La fracción impropia de $1\frac{7}{9}$ es igual a:

Solución

Se realiza el procedimiento para obtener:

$$1\frac{7}{9}=\frac{(1\times 9)+7}{9}=\frac{9+7}{9}=\frac{16}{9}$$

por tanto, $1\frac{7}{9}=\frac{16}{9}$

EJERCICIO 29

Convierte las siguientes fracciones mixtas en fracciones impropias.

1. $3\frac{2}{5}$	4. $5\frac{4}{6}$	7. $1\frac{9}{10}$	10. $7\frac{6}{19}$	13. $15\frac{19}{20}$	16. $50\frac{4}{7}$
2. $1\frac{2}{9}$	5. $7\frac{2}{3}$	8. $2\frac{8}{13}$	11. $12\frac{3}{10}$	14. $23\frac{1}{12}$	17. $121\frac{3}{5}$
3. $4\frac{2}{7}$	6. $8\frac{3}{4}$	9. $5\frac{3}{16}$	12. $18\frac{2}{30}$	15. $36\frac{3}{14}$	18. $223\frac{1}{7}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fracciones equivalentes

Son aquellas que se expresan de manera diferente, pero representan la misma cantidad. Para averiguar si 2 fracciones son equivalentes se efectúa la multiplicación del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, y el resultado debe ser igual a la multiplicación del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Son equivalentes las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{15}{20}$?

Solución

Se efectúan las multiplicaciones indicadas y se comparan los resultados:

$$(3)(20) \text{ y } (4)(15)$$
$$60 = 60$$

Por tanto, las fracciones son equivalentes.

2 ¿Son equivalentes las fracciones $1\frac{1}{4}$ y $\frac{30}{24}$?

Solución

Se convierte la fracción mixta en fracción impropia $1\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ y entonces para comparar $\frac{5}{4}$ con $\frac{30}{24}$ se realizan los productos:

$$(5)(24) \text{ y } (4)(30)$$
$$120 = 120$$

Las fracciones, por consiguiente, son equivalentes.

EJERCICIO 30

Indica si las siguientes fracciones son equivalentes.

1. $\frac{2}{5}$ y $\frac{6}{15}$
2. $\frac{3}{8}$ y $\frac{48}{17}$
3. $\frac{1}{6}$ y $\frac{12}{72}$
4. $\frac{4}{9}$ y $\frac{28}{72}$
5. $\frac{18}{24}$ y $\frac{6}{8}$
6. $\frac{80}{15}$ y 6
7. $1\frac{3}{8}$ y $\frac{66}{48}$
8. $\frac{9}{7}$ y $1\frac{9}{35}$
9. $\frac{7}{4}$ y $1\frac{18}{24}$
10. $1\frac{1}{3}$ y $1\frac{9}{27}$
11. $\frac{13}{4}$ y $3\frac{3}{4}$
12. 6 y $5\frac{7}{8}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Propiedades

El valor de una fracción no se altera al multiplicar su numerador y denominador por un mismo número.

EJEMPLOS

1 Al multiplicar por 2 al numerador y denominador de la fracción $\frac{6}{7}$, se obtiene una fracción equivalente:

$$\frac{6}{7}=\frac{6\times 2}{7\times 2}=\frac{12}{14}$$

2 Si al numerador y denominador de la fracción $\frac{5}{3}$ se les multiplica por 4, se obtiene la fracción equivalente $\frac{20}{12}$.

$$\frac{5}{3}=\frac{5\times 4}{3\times 4}=\frac{20}{12}$$

El valor de una fracción no se altera cuando al numerador y denominador se les divide entre el mismo número. A este procedimiento se le conoce como “simplificación de una fracción”.

EJEMPLOS

1 Simplifica la fracción $\frac{12}{14}$.

Solución

Para simplificar la fracción $\frac{12}{14}$, se debe dividir al numerador y denominador entre 2 que es el máximo común divisor de 12 y 14

$$\frac{12}{14}=\frac{12\div 2}{14\div 2}=\frac{6}{7}$$

Por tanto, $\frac{12}{14}=\frac{6}{7}$

2 ¿Cuál es la fracción que resulta al simplificar $\frac{36}{24}$?

Solución

Otra forma de simplificar una fracción es dividir al numerador y al denominador entre un número primo, este proceso se realiza hasta que ya no exista un divisor primo común.

$$\frac{36}{24}=\frac{36\div 2}{24\div 2}=\frac{18}{12}=\frac{18\div 2}{12\div 2}=\frac{9}{6}=\frac{9\div 3}{6\div 3}=\frac{3}{2}$$

Por consiguiente, $\frac{36}{24}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$

EJERCICIO 31

Simplifica las siguientes fracciones:

1. $\frac{20}{24}$
2. $\frac{18}{12}$
3. $\frac{9}{12}$
4. $\frac{28}{42}$
5. $\frac{25}{10}$
6. $\frac{12}{60}$
7. $\frac{90}{200}$
8. $\frac{42}{48}$
9. $\frac{132}{165}$
10. $\frac{245}{70}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ubicación en la recta numérica

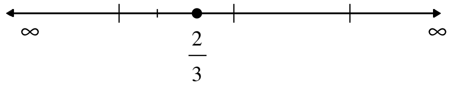
Para ubicar la fracción $\frac{a}{b}$ en la recta numérica, se divide cada unidad en el número de partes que indica el denominador b y se toman las partes que indica el numerador a.

EJEMPLOS

1 Localiza en la recta numérica el número $\frac{2}{3}$.

Solución

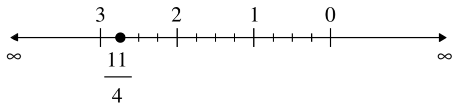
Se divide la unidad en 3 partes iguales y se toman 2



2 Grafica la fracción $-2\frac{3}{4}$ en la recta numérica.

Solución

Se convierte la fracción mixta a fracción impropia $-2\frac{3}{4}=-\frac{11}{4}$, ahora se divide en 4 partes iguales a las unidades que se encuentran a la izquierda del 0 y se toman 11 de esas divisiones.



EJERCICIO 32

Grafica en la recta numérica las siguientes fracciones:

1. $\frac{5}{8}$
2. $-\frac{9}{4}$
3. $-\frac{2}{6}$
4. $\frac{9}{5}$
5. $\frac{5}{9}$
6. $\frac{8}{12}$
7. $1\frac{1}{5}$
8. $-2\frac{1}{3}$
9. $-1\frac{2}{6}$
10. $2\frac{5}{10}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta con igual denominador

Se suman o restan los numeradores y se escribe el denominador en común.

EJEMPLOS

1 Efectúa la operación $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$.

Solución

Se suman los numeradores, el resultado tiene como denominador 4 y la fracción resultante se simplifica.

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3+2+1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

Por tanto, el resultado de la operación es $\frac{3}{2}$

2 Efectúa la siguiente operación $\frac{7}{9}-\frac{5}{9}$.

Solución

El denominador de las fracciones es el mismo, por lo tanto, se restan únicamente los numeradores y el resultado tiene el mismo denominador.

$$\frac{7}{9}-\frac{5}{9}=\frac{7-5}{9}=\frac{2}{9}$$

Por consiguiente, el resultado es $\frac{2}{9}$

3 ¿Cuál es el resultado de $1\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-2\frac{1}{5}$?

Solución

Se convierten las fracciones mixtas en fracciones impropias y se efectúan las operaciones.

$$1\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-2\frac{1}{5}=\frac{8}{5}+\frac{4}{5}-\frac{11}{5}=\frac{8+4-11}{5}=\frac{1}{5}$$

El resultado es $\frac{1}{5}$

EJERCICIO 33

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $\frac{1}{3}+\frac{5}{3}$
2. $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$
3. $\frac{4}{9}+\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$
4. $\frac{7}{6}+\frac{5}{6}+\frac{1}{6}$
5. $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}+\frac{6}{7}$
6. $\frac{3}{10}+\frac{7}{10}+\frac{1}{10}+\frac{5}{10}$
7. $1\frac{5}{9}+3\frac{1}{9}+\frac{7}{9}$
8. $\frac{13}{16}+2\frac{9}{16}+4\frac{1}{16}+1\frac{3}{16}$
9. $1\frac{5}{8}+\frac{13}{8}+2\frac{7}{8}+\frac{6}{8}+\frac{9}{8}$
10. $\frac{12}{5}-\frac{8}{5}$
11. $\frac{4}{9}-\frac{1}{9}$
12. $\frac{11}{15}-\frac{7}{15}$
13. $3\frac{1}{3}-\frac{8}{3}$
14. $1\frac{2}{17}-\frac{14}{17}$
15. $\frac{4}{6}+\frac{7}{6}-\frac{8}{6}$
16. $\frac{3}{12}-\frac{5}{12}+\frac{10}{12}$
17. $\frac{3}{20}+\frac{18}{20}-\frac{13}{20}-\frac{4}{20}$
18. $\frac{7}{9}-\frac{11}{9}+\frac{15}{9}-\frac{6}{9}-\frac{1}{9}$
19. $1\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-3\frac{1}{2}$
20. $2\frac{7}{9}-\frac{4}{9}-\frac{7}{9}$
21. $1\frac{3}{4}-1\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$
22. $1\frac{3}{5}+7\frac{4}{5}-9\frac{2}{5}$
23. $3\frac{2}{7}+1\frac{3}{7}-4\frac{3}{7}$
24. $2\frac{3}{5}+1\frac{1}{5}-2\frac{4}{5}-\frac{2}{5}$
25. $2\frac{1}{8}-\frac{7}{8}-1\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$
26. $\frac{14}{13}-1\frac{7}{13}-\frac{2}{13}+1\frac{9}{13}$
27. $3\frac{2}{5}+1\frac{1}{5}+\frac{6}{5}-4\frac{4}{5}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta con diferente denominador

Se busca el mínimo común múltiplo de los denominadores, también conocido como común denominador, éste se divide entre cada uno de los denominadores de las fracciones y los resultados se multiplican por su correspondiente numerador. Los números que resultan se suman o se restan para obtener el resultado final.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa $\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{6}$.

Solución

El mínimo común múltiplo de los denominadores es 6, se divide por cada uno de los denominadores y el resultado se multiplica por su respectivo numerador, posteriormente se suman los resultados de los productos.

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{6}=\frac{(3)(3)+(2)(1)+(1)(2)}{6}=\frac{9+2+2}{6}=\frac{13}{6}=2\frac{1}{6}$$

Por tanto, el resultado de la suma es $\frac{13}{6}$ o $2\frac{1}{6}$

2 ¿Cuál es el resultado de $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$?

Solución

El común denominador de 2 y 5 es 10, se efectúan las operaciones y se obtiene el resultado.

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{5-2}{10}=\frac{3}{10}$$

3 Realiza $3\frac{1}{6}-1\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

Solución

Se convierten las fracciones mixtas a fracciones impropias, enseguida se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores y se realiza el procedimiento para obtener el resultado.

$$3\frac{1}{6}-1\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{19}{6}-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{19-9+2}{6}=\frac{12}{6}=2$$

EJERCICIO 34

Realiza las siguientes operaciones:

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$
2. $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$
3. $\frac{5}{10}+\frac{3}{2}$
4. $\frac{7}{24}+\frac{11}{30}$
5. $\frac{8}{26}+\frac{15}{39}$
6. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
7. $\frac{5}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$
8. $\frac{5}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{18}$
9. $\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{1}{16}$
10. $\frac{5}{8}-\frac{1}{4}$
11. $\frac{5}{12}-\frac{7}{24}$
12. $\frac{11}{64}-\frac{5}{8}$
13. $\frac{7}{5}+\frac{8}{35}-\frac{9}{21}$
14. $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{1}{10}$
15. $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\frac{11}{12}$
16. $\frac{7}{12}+\frac{3}{8}-\frac{1}{20}$
17. $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}-\frac{3}{20}$
18. $3+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$
19. $\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{2}$
20. $\frac{4}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$
21. $\frac{5}{8}+\frac{3}{4}-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}$

22. $3+\frac{2}{5}-\frac{1}{4}+\frac{7}{2}$

23. $\frac{7}{5}-\frac{1}{2}-\frac{3}{10}-\frac{32}{20}$

24. $\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$

25. $4\frac{3}{10}-\frac{3}{5}$

26. $4\frac{1}{2}-6$

27. $\frac{1}{3}-\frac{1}{12}-2\frac{3}{4}$

28. $1\frac{1}{6}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$

29. $4\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}+2$

30. $7\frac{1}{2}-1\frac{2}{5}+\frac{9}{10}$

31. $6\frac{1}{5}+3\frac{2}{3}-1\frac{1}{4}$

32. $3\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}+1\frac{1}{4}$

33. $2\frac{1}{4}+3\frac{1}{3}-1\frac{1}{2}+1\frac{1}{6}$

34. $1\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-2\frac{1}{2}+1\frac{7}{12}$

35. $1\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}-2\frac{1}{8}$

36. $1\frac{1}{6}-\frac{3}{2}+2\frac{7}{12}-4+\frac{1}{3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Para preparar un pastel se emplean los siguientes ingredientes: $1\frac{1}{2}$ kg de harina, $\frac{1}{2}$ kg de huevo, una taza de leche que equivale a $\frac{1}{4}$ kg y azúcar $\frac{5}{8}$ kg. ¿Cuántos kilogramos pesan estos ingredientes?

Solución

Se suman los kilogramos de todos los ingredientes y se obtiene:

$$1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{5}{8}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{5}{8}=\frac{12+4+2+5}{8}=\frac{23}{8}=2\frac{7}{8}$$

Por consiguiente, los ingredientes pesan $2\frac{7}{8}$ kg

2 Miguel perdió $\frac{1}{3}$ de su dinero y prestó $\frac{1}{4}$. ¿Qué parte de su dinero le queda?

Solución

Se suma la porción que perdió con la que prestó y este resultado se resta a la unidad que representa lo que tenía.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4+3}{12}=\frac{7}{12} \qquad 1-\frac{7}{12}=\frac{1}{1}-\frac{7}{12}=\frac{12-7}{12}=\frac{5}{12}$$

Por tanto, a Miguel le sobran $\frac{5}{12}$ de su dinero.

EJERCICIO 35

Resuelve los siguientes problemas:

1. Juan compró en el supermercado $\frac{1}{2}$ kg de azúcar, $\frac{3}{4}$ kg de harina y 1 kg de huevo, estos productos los colocó en una bolsa, ¿cuántos kilogramos pesa dicha bolsa?

2. Dos calles tienen las siguientes longitudes: $2\frac{2}{5}$ y $1\frac{3}{4}$ de kilómetro, ¿cuál es la longitud total de ambas?

3. Al nacer un bebé pesó $2\frac{1}{4}$ kilogramos, en su primera visita al pediatra éste informó a los padres que el niño había aumentado $\frac{1}{2}$ kilogramo; en su segunda visita observaron que su aumento fue de $\frac{5}{8}$ de kilogramo. ¿Cuántos kilos pesó el bebé en su última visita al médico?

4. A Joel le pidieron que realizara una tarea de física que consistía en contestar un cuestionario y resolver unos problemas. Se tardó $\frac{3}{4}$ de hora en responder el cuestionario y $2\frac{1}{2}$ para solucionar los problemas, ¿cuánto tiempo le tomó a Joel terminar toda la tarea?
5. En su dieta mensual una persona debe incluir las siguientes cantidades de carne: la primera semana $\frac{1}{4}$ de kilogramo, la segunda $\frac{3}{8}$, la tercera $\frac{7}{16}$ y la última semana $\frac{1}{2}$ kilogramo. ¿Cuántos kilos consumió durante el mes?
6. Tres cuerdas tienen las siguientes longitudes: $3\frac{2}{5}$, $2\frac{3}{10}$ y $4\frac{1}{2}$ metros, cada una. ¿Cuál es la longitud de las 3 cuerdas juntas?
7. La fachada de una casa se va a pintar de color blanco y azul, si $\frac{5}{12}$ se pintan de color blanco, ¿qué porción se pintará de color azul?
8. Un ciclista se encuentra en una competencia y ha recorrido $\frac{5}{9}$ de la distancia que debe cubrir para llegar a la meta, ¿qué fracción de la distancia total le falta por recorrer?
9. Un sastre realiza una compostura a un pantalón cuyo largo originalmente es de 32 pulgadas, si para hacer la valenciana se dobla hacia arriba $1\frac{3}{4}$ de pulgada, ¿de qué largo quedó el pantalón después de la compostura?
10. De una bolsa de 1 kilogramo de azúcar se extrae una porción que equivale a $\frac{3}{8}$ de kilogramo, ¿cuánta azúcar queda en la bolsa?
11. Un depósito contiene agua hasta $\frac{3}{4}$ partes de su capacidad, si se ocupa una cantidad de agua equivalente a la mitad de la capacidad del depósito, ¿qué fracción de su máxima capacidad sobra?
12. Enrique vende $\frac{1}{4}$ de terreno de su finca, alquila $\frac{1}{6}$ y lo restante lo cultiva. ¿Qué porción de la finca siembra?
13. De un rollo de tela se han cortado las siguientes porciones: $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{6}$ de metro, ¿qué porción del rollo queda?
14. Luis, Jorge y Adán se organizan para realizar una tarea: Luis se compromete a hacer la mitad y Jorge hará la octava parte, ¿qué fracción de la tarea le corresponde a Adán?
15. Los $\frac{2}{5}$ de un terreno se venden, $\frac{1}{4}$ del resto se siembra de chile de árbol, ¿qué parte del terreno sobra?
16. $\frac{3}{10}$ de los alumnos de una escuela están en cuarentena debido a que se encuentran enfermos de sarampión, además $\frac{1}{5}$ de la población escolar llega tarde y las autoridades no les permiten la entrada. ¿Qué porción de alumnos asistió a la escuela?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación

Para realizar esta operación se multiplican los numeradores y los denominadores. En caso de que existan fracciones mixtas, se deben convertir a fracciones impropias y posteriormente realizar los productos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa $\frac{2}{5} \times \frac{1}{6}$.

Solución

Se aplica el procedimiento descrito y se simplifica el resultado.

$$\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{2\times1}{5\times6}=\frac{2}{30}=\frac{2\div2}{30\div2}=\frac{1}{15}$$

Por tanto, el resultado es $\frac{1}{15}$

2 ¿Cuál es el resultado de $3\frac{2}{4}\times4\frac{1}{6}$?

Solución

Se convierten las fracciones mixtas a impropias y se efectúa el producto.

$$3\frac{2}{4}\times4\frac{1}{6}=\frac{14}{4}\times\frac{25}{6}=\frac{350}{24}=\frac{350\div2}{24\div2}=\frac{175}{12}=14\frac{7}{12}$$

El resultado del producto es $\frac{175}{12}$ o $14\frac{7}{12}$

3 Realiza $\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}\times1\frac{1}{3}\times2$.

Solución

Se convierten las fracciones mixtas a impropias, se observa que existen factores iguales en el numerador y denominador, por lo tanto, es recomendable simplificar la expresión para obtener el resultado.

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}\times1\frac{1}{3}\times2=\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{1}=\frac{3\times1\times4\times2}{4\times6\times3\times1}=\frac{1\times2}{6\times1}=\frac{2}{6}=\frac{2\div2}{6\div2}=\frac{1}{3}$$

Por consiguiente, el resultado es $\frac{1}{3}$

EJERCICIO 36

Efectúa los siguientes productos:

1. $\frac{2}{5}\times\frac{10}{8}$
2. $\frac{5}{4}\times\frac{2}{7}$
3. $\frac{3}{6}\times\frac{2}{9}$
4. $\frac{3}{4}\times\frac{6}{3}$
5. $\frac{3}{4}\times2\frac{3}{5}$
6. $3\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}$
7. $1\frac{2}{5}\times2\frac{5}{7}$
8. $\frac{6}{3}\times2\frac{1}{2}$
9. $1\frac{3}{5}\times4\frac{5}{8}$
10. $2\frac{2}{3}\times3\frac{1}{5}$
11. $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}$
12. $\frac{1}{5}\times\frac{9}{4}\times\frac{12}{6}$
13. $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}$
14. $\frac{3}{4}\times\frac{5}{3}\times\frac{4}{5}$
15. $1\frac{1}{6}\times\frac{12}{7}\times\frac{14}{2}$
16. $\frac{7}{9}\times\frac{8}{5}\times\frac{3}{14}\times15$
17. $2\frac{2}{5}\times\frac{5}{9}\times\frac{1}{3}\times1\frac{3}{5}$
18. $\frac{2}{9}\times\frac{7}{5}\times\frac{3}{14}\times5$
19. $2\frac{4}{9}\times2\frac{1}{4}\times1\frac{3}{11}\times1\frac{1}{3}$
20. $2\times7\frac{3}{5}\times1\frac{6}{19}\times\frac{3}{4}$
21. $1\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}\times2\frac{2}{5}\times2\frac{1}{2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 En un grupo hay 40 alumnos, de ellos las tres quintas partes son mujeres, ¿cuántas mujeres hay en el grupo?

Solución

Para obtener el total de mujeres del grupo se multiplica el total de alumnos por la fracción que representan las mujeres.

$$40\times\frac{3}{5}=\frac{40}{1}\times\frac{3}{5}=\frac{120}{5}=24\text{ mujeres}$$

Por consiguiente, hay 24 mujeres en el grupo.

2 Se realizó una encuesta para averiguar qué medios informativos se prefieren; de cada 10 personas, 4 prefieren el periódico; si se encuestó a 600 individuos, ¿cuántas prefieren otros medios?

Solución

La fracción $\frac{4}{10}$ representa a las personas que prefieren el periódico, por lo tanto, $\frac{6}{10}$ representa a las personas que prefieren otros medios, entonces, para obtener el número de personas que representa esta última fracción se multiplica por el total de la muestra.

$$\frac{6}{10}\times 600=\frac{6}{10}\times\frac{600}{1}=\frac{3600}{10}=360\text{ personas prefieren otros medios.}$$

EJERCICIO 37

Resuelve los siguientes problemas:

1. Una alberca tiene capacidad para 3 000 litros de agua, si sólo se encuentra a tres cuartas partes de su capacidad, ¿cuántos litros tiene?
2. En un estadio de béisbol $\frac{2}{3}$ de los aficionados apoyan al equipo local, si el número de asistentes es de 6 300 personas, ¿cuántas apoyan al equipo visitante?
3. La tercera parte de una población de 2 100 habitantes es afectada por cierto virus, ¿cuántos habitantes no padecen el virus?
4. Se sabe que los viernes por la noche en el D.F. $\frac{1}{4}$ del total de automovilistas manejan en estado de ebriedad, si se realiza un sondeo entre 600 conductores un viernes por la noche, ¿cuántos automovilistas se espera que manejen en estado inconveniente?
5. En una caja hay 120 pelotas: verdes, rojas y azules, si las pelotas rojas son la tercera parte del total y las azules equivalen a la sexta parte, ¿cuántas hay de cada color?
6. El costo de un kilogramo de azúcar es de $8, ¿cuál es el precio de $3\frac{3}{4}$ kg?
7. Julián tenía $1 500, si compró 3 libros que le costaron dos quintas partes de su dinero, ¿cuánto le sobró?
8. La velocidad de un automóvil es de 100 kilómetros por hora, ¿qué distancia recorre en un tiempo de $2\frac{3}{4}$ horas?
9. Determina los dos tercios de los tres cuartos de la mitad de 240.

10. En un grupo de 60 alumnos, las dos terceras partes se inclinan por la física, de éstos, la mitad quieren ser físicos nucleares y la cuarta parte de ellos desea realizar una maestría en el extranjero. ¿Cuántos alumnos desean estudiar su maestría en otro país?

11. Si a 2 de cada 10 personas les gusta el rock, de una población de 4 500, ¿cuántas prefieren otros ritmos?

12. La recomendación de un doctor a un enfermo de gripe es que se tome $1\frac{1}{2}$ pastillas de ácido acetilsalicílico (aspirina) durante 4 días cada 8 horas, para contrarrestar los malestares de esta enfermedad infecciosa. Si el paciente sigue cabalmente las indicaciones del doctor, ¿cuántas pastillas de aspirina tomará?

13. Las calorías y los joules en la física son unidades de energía; además, se sabe que una caloría equivale a $\frac{21}{5}$ joules. ¿Cuánta energía en joules habrá en un alimento de 120 calorías?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División

- Se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, el producto es el numerador de la fracción resultante.
- Se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción, el producto es el denominador de la fracción resultante.

Para realizar esta operación:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza $\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}$.

Solución

Se aplican los pasos y se simplifica el resultado.

$$\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{2\times 5}{3\times 4}=\frac{10}{12}=\frac{10\div 2}{12\div 2}=\frac{5}{6}$$

Por tanto, $\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{5}{6}$

2 Determina el resultado de $4\frac{2}{5}\div 2\frac{3}{4}$.

Solución

Se convierten las fracciones mixtas en impropias y se efectúa la división.

$$4\frac{2}{5}\div 2\frac{3}{4}=\frac{22}{5}\div\frac{11}{4}=\frac{22\times 4}{5\times 11}=\frac{88}{55}=\frac{88\div 11}{55\div 11}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$$

Por consiguiente: $4\frac{2}{5}\div 2\frac{3}{4}=1\frac{3}{5}$

EJERCICIO 38

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $\frac{1}{6}\div\frac{2}{3}$
2. $\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$
3. $\frac{6}{8}\div\frac{1}{4}$
4. $\frac{13}{9}\div\frac{4}{3}$
5. $\frac{5}{12}\div\frac{5}{6}$
6. $\frac{7}{8}\div\frac{21}{16}$
7. $\frac{4}{3}\div\frac{5}{30}$
8. $\frac{28}{7}\div\frac{4}{5}$
9. $\frac{4}{6}\div 1\frac{2}{3}$
10. $2\frac{2}{3}\div\frac{4}{15}$
11. $1\frac{4}{5}\div\frac{13}{10}$
12. $\frac{1}{2}\div 3\frac{1}{4}$
13. $\frac{4}{9}\div 8$
14. $3\frac{1}{4}\div 26$
15. $1\div 1\frac{1}{4}$
16. $34\div 2\frac{5}{6}$
17. $\frac{11}{9}\div 3\frac{2}{3}$
18. $5\frac{1}{4}\div 1\frac{1}{6}$
19. $5\frac{5}{8}\div 3\frac{3}{4}$
20. $1\frac{11}{13}\div 8$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

¿Cuántas bolsas de $\frac{5}{8}$ de kilogramo se pueden llenar con 20 kilogramos de galletas?

Solución

Se dividen los 20 kilogramos entre la capacidad de las bolsas para obtener el número de las que se pueden llenar:

$$20\div\frac{5}{8}=\frac{20}{\frac{5}{8}}=\frac{\frac{20}{1}}{\frac{5}{8}}=\frac{20\times 8}{5\times 1}=\frac{160}{5}=32$$

Por tanto, con 20 kilos se pueden llenar 32 bolsas de $\frac{5}{8}$ de kilogramo.

EJERCICIO 39

Resuelve los siguientes problemas:

1. El peso aproximado de una pizza familiar es de un kilogramo y si la pizza se divide en 8 porciones iguales, ¿cuánto pesa cada rebanada?
2. ¿Cuántas botellas de tres cuartos de litro se llenan con 60 litros de agua?
3. ¿Cuántas piezas de $2\frac{2}{3}$ de metro de longitud se obtienen de una varilla de $13\frac{1}{3}$ metros de largo?
4. Si una llave vierte $6\frac{1}{3}$ litros de agua por minuto, ¿cuánto tiempo empleará en llenar un depósito de $88\frac{2}{3}$ litros de capacidad?
5. ¿Cuál es la velocidad por hora de un automóvil que en $2\frac{1}{2}$ horas recorre 120 kilómetros?
6. Francisco compró $8\frac{2}{3}$ kilogramos de jamón con $156, ¿cuál es el costo de un kilogramo?
7. Una familia de 6 integrantes consume diariamente $1\frac{1}{2}$ litros de leche, si todos ingieren la misma cantidad, ¿cuánto toma cada uno?
8. Javier repartió 160 kilogramos de arroz entre un grupo de personas, de tal forma que a cada una le tocaron $6\frac{2}{3}$ kg, ¿cuántas personas eran?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Operaciones con signos de agrupación

Se realizan las operaciones que se encuentran dentro de un signo de agrupación, posteriormente éstos se suprimen, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

1 Efectúa $2\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$.

Solución

Se efectúan las operaciones que encierran los paréntesis, los resultados se multiplican por las cantidades de fuera y se simplifican para sumarse después y obtener el resultado final.

$$2\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=2\left(\frac{5-2}{4}\right)+3\left(\frac{3-2}{6}\right)$$
$$=2\left(\frac{3}{4}\right)+3\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{6}{4}+\frac{3}{6}$$
$$=\frac{6}{4}+\frac{3}{6}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

El resultado de la operación es 2

2 ¿Cuál es el resultado de $\frac{5}{4}\div\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$?

Solución

Se efectúa la suma, el resultado se simplifica y después se realiza la división para obtener el resultado de la operación propuesta.

$$\frac{5}{4}\div\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{4}\div\left(\frac{2+1}{6}\right)$$
$$=\frac{5}{4}\div\left(\frac{3}{6}\right)=\frac{5}{4}\div\frac{1}{2}$$
$$=\frac{5\times 2}{4\times 1}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$$

Por consiguiente, el resultado es $\frac{5}{2}$ o $2\frac{1}{2}$

3 Realiza $\left(1\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$.

Solución

Se realizan las restas, después la multiplicación y se simplifica el resultado.

$$\left(1\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{7}{6}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{14-9}{12}\right)\left(\frac{5-2}{10}\right)$$
$$=\left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{3}{10}\right)=\frac{15}{120}=\frac{15\div 15}{120\div 15}=\frac{1}{8}$$

Por tanto, el resultado es $\frac{1}{8}$

4 ¿Cuál es el resultado de $\left(1\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\right)\div\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\right)$?

Solución

Se realizan las restas y posteriormente la división para obtener el resultado final.

$$\left(1\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\right)\div\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{6}\right)\div\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\right)$$
$$=\left(\frac{8-5}{6}\right)\div\left(\frac{3-6}{8}\right)$$
$$=\frac{3}{6}\div\frac{-3}{8}=\frac{24}{-18}=-\frac{4}{3}$$

Por consiguiente, el resultado es $-\frac{4}{3}$

EJERCICIO 40

Realiza las siguientes operaciones:

1. $\frac{3}{7}(2)-\frac{5}{14}(4)$
2. $\frac{3}{4}(3)+1\frac{1}{2}$
3. $\frac{3}{8}(4-2)+\frac{5}{16}(8-4)$
4. $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$
5. $\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right)$
6. $\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-2\frac{1}{3}\right)$
7. $\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(3-2\frac{1}{2}\right)$
8. $\left(5\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{12}{17}\right)$
9. $\left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{7}-\frac{3}{14}\right)$
10. $\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)$
11. $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+\frac{7}{10}\right)\div\left(\frac{3}{4}\right)$
12. $\left(1\frac{1}{9}\right)\div\left(4-2\frac{1}{3}\right)$
13. $\left(\frac{17}{22}+1\right)\div\left(2-\frac{9}{11}\right)$
14. $\left(1-\frac{1}{2}\right)\div\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{8}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 La matrícula de una escuela aumentó $\frac{1}{4}$ con respecto al año pasado. Si había 400 alumnos, ¿cuántos alumnos hay este año?

Solución

Se obtiene la cuarta parte de 400: $\frac{1}{4}$ (400) y se suman los 400 alumnos del año pasado.

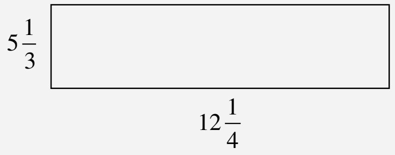
$$\frac{1}{4}(400)+400=\frac{400}{4}+400$$
$$=100+400$$
$$=500$$

Por tanto, hay 500 alumnos este año.

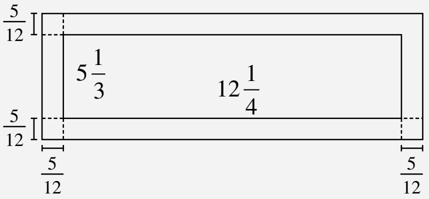
2 Una fotografía mide $5\frac{1}{3}$ pulgadas de ancho por $12\frac{1}{4}$ pulgadas de largo. Si esta fotografía se coloca en un marco que tiene un ancho constante de $\frac{5}{12}$ pulgadas, ¿cuáles son las dimensiones de la fotografía colocada ya en el marco?

Solución

Fotografía:



Fotografía con marco



Entonces las dimensiones son:

ancho: $5\frac{1}{3}+\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{12}\right)=\frac{16}{3}+\frac{10}{12}=\frac{16}{3}+\frac{5}{6}=\frac{32+5}{6}=\frac{37}{6}=6\frac{1}{6}$ pulgadas.

largo: $12\frac{1}{4}+\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{12}\right)=\frac{49}{4}+\frac{10}{12}=\frac{49}{4}+\frac{5}{6}=\frac{147+10}{12}=\frac{157}{12}=13\frac{1}{12}$ pulgadas.

EJERCICIO **41**

Resuelve los siguientes problemas:

1. Se sabe que cuando un fluido se congela aumenta $\frac{1}{12}$ del volumen que ocupaba en su estado líquido, si una botella de agua tiene un volumen de 3 600 mililitros en su estado líquido, ¿cuál será el volumen del mismo fluido en estado sólido?
2. Agustín se ejercita caminando todas las tardes de la semana para mejorar su presión arterial, entre semana camina $\frac{1}{2}$ hora, mientras que el fin de semana camina $\frac{3}{4}$ de hora. ¿Cuánto tiempo invierte Agustín en caminar?
3. Jorge y David deciden juntar parte de sus ahorros para comprar un nuevo juego de video, Jorge aporta $\frac{3}{5}$ de \$2 000 ahorrados, mientras que David decide aportar $\frac{1}{3}$ de \$3 000, ¿cuál fue el costo del juego de video?
4. Roberto divide su sueldo de la siguiente forma, $\frac{1}{3}$ a alimentación, $\frac{1}{2}$ al pago de renta y servicios y $\frac{1}{6}$ a diversión. Si Roberto percibe en un mes \$12 000, ¿cuánto dinero designa a cada rubro?
5. En una bodega hay 4 cajas de 20 bolsas de $\frac{1}{2}$ kilogramo de detergente, 6 cajas con 15 bolsas de $\frac{3}{4}$ de kilogramo y 3 cajas con 10 bolsas de un kilogramo. ¿Cuántos kilogramos de detergente hay en la bodega?
6. En pruebas de manejo se ha detectado que por efecto del uso y del calor, la presión de los neumáticos de un automóvil aumenta $\frac{1}{14}$ con respecto a la presión que tienen si el automóvil se encuentra estático. ¿Cuál era la presión de unos neumáticos, que después de ser sometidos a una prueba de manejo registraron una presión de $30\frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$?
7. Una fotografía mide $6\frac{1}{4}$ pulgadas de ancho por $10\frac{1}{2}$ pulgadas de largo. Si esta fotografía se coloca en un marco que tiene un ancho constante de $\frac{3}{8}$ pulgadas, ¿cuáles son las nuevas dimensiones de la fotografía colocada ya en el marco?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fracciones complejas

Se llama así a la fracción que está formada por una serie de operaciones subsecuentes con fracciones.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa $\dfrac{1-\dfrac{3}{4}}{1+\dfrac{1}{8}}$.

Solución

Primero se efectúan las operaciones $1-\dfrac{3}{4}$ y $1+\dfrac{1}{8}$, sus resultados se dividen y se simplifican para obtener el resultado que se desea.

$$\frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{8}}=\frac{\frac{4-3}{4}}{\frac{8+1}{8}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{8}}=\frac{8\times1}{9\times4}=\frac{8}{36}=\frac{8\div4}{36\div4}=\frac{2}{9}$$

Por consiguiente, el resultado es $\dfrac{2}{9}$

2 ¿Cuál es el resultado de $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}}}$?

Solución

Se inicia con la operación $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}$ y las subsecuentes hasta obtener el resultado.

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2-1}{4}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$$

Por tanto, el resultado que se buscaba es $\dfrac{1}{5}$

EJERCICIO **42**

Resuelve las siguientes fracciones complejas:

1. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{7}{2}-3}}$

2. $1+\dfrac{2}{3+\dfrac{5}{1-\dfrac{1}{3}}}$

3. $3+\dfrac{2}{3+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4}}}$

4. $2-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}}$

5. $1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}}}$

6. $\dfrac{\dfrac{2-\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}}+\dfrac{1+\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}}}{1-\dfrac{1}{2}}\times\dfrac{9}{40}$

7. $$\frac{\frac{1+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}-\frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}}{1+\frac{2}{3}}\times\left(10\frac{1}{3}-3\frac{2}{3}\right)$$

10. $$\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{3-\frac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}}}}$$

13. $$\frac{\frac{1+\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{2-\frac{1}{2}}}+\frac{2-\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{1+\frac{1}{2}}}}{7+\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{7}{6}}}}$$

8. $$\frac{\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}}+\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}}-\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{10}}}{\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}}$$

11. $$\frac{\frac{3-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}-\frac{2-\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}}{3-\frac{1}{2}}\times\left(\frac{3}{4}\div\frac{1}{25}\right)$$

14. $$\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{1+2}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$$

9. $$\frac{\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}}{\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}}$$

12. $$\frac{\frac{2+\frac{1}{3}}{7}+\frac{1-\frac{1}{4}}{3}}{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}}}\times\left(\frac{2}{7}\div\frac{4}{19}\right)$$

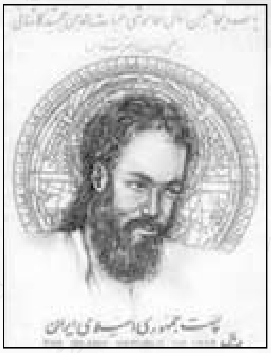
15. $$1-\frac{1}{1+\frac{2}{3-\frac{1}{2}}}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}$$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 5

NÚMEROS DECIMALES

Reseña HISTÓRICA



Al-Kashi (n. 1380) contribuyó al desarrollo de las fracciones decimales no sólo para aproximar números algebraicos, sino también para números reales como *pi*. Su aporte a las fracciones decimales es tan importante que por muchos años se le consideró su inventor. Sin embargo, en la década de los ochenta del siglo pasado se halló evidencia de que el empleo de fracciones decimales se remonta al siglo X en el Islam, por al-Uqlidisi; de hecho, el sistema de notación que empleó al-Uqlidisi era superior al de al-Kashi.

Ghiyath al-Din Jamshid Mas'ud
al-Kashi (1380-1450)

Definición

Un **número decima**l o **fracción decimal** es el cociente de números racionales o el resultado de una fracción común. Existen dos tipos de números decimales, los exactos y los inexactos.

Números decimales exactos. Son aquellos que tienen un número finito de cifras decimales.

Ejemplos

0.25, es un número de 2 cifras decimales
0.732, tiene 3 cifras decimales
2.1, tiene una cifra entera y una decimal

Números decimales inexactos. Son aquellos que tienen un número infinito de cifras decimales. En estos números, los puntos suspensivos indican que existe un número infinito de cifras o que el residuo de la división nunca es cero.

Ejemplos

$$0.96525\ldots,\quad 0.85858585\ldots,\quad 6.333333\ldots$$

- **Números decimales inexactos periódicos**

Decimal que tiene una o más cifras que se repiten indefinidamente después del punto o de una cierta cifra decimal. La cifra o cifras repetidas reciben el nombre de periodo.

Ejemplos

Los decimales periódicos se expresan de la siguiente forma:

$0.33333\ldots = 0.\overline{3}$, en este ejemplo el periodo consta de una cifra
$0.32565656\ldots = 0.32\overline{56}$, el periodo es 56 y la parte no periódica es 32
$5.315024024024\ldots = 5.315\overline{024}$, 5 es la parte entera, 315 la decimal y 024 el periodo

- **Números decimales inexactos no periódicos**

Decimal que no tiene un periodo. Estos números representan a los números irracionales (no se expresan como el cociente de 2 números enteros).

Ejemplos

$$1.7320508\ldots = \sqrt{3},\quad 3.141592654\ldots = \pi,\quad 2.7182818\ldots = e$$

Lectura y escritura

Para leer o escribir números decimales, se toma como referencia la siguiente tabla.

Unidades			Decimales					
Centenas	Decenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos	Diez milésimos	Cien milésimos	Millonésimos

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Lee el número 0.18.

Solución

0.18 se acomoda de izquierda a derecha haciendo coincidir el cero con el periodo de las unidades.

Unidades	Décimos	Centésimos
0	1	8

El número dado está formado por 1 décimo y 8 centésimos, y se lee: "dieciocho centésimos".

2 Lee el número 5.037.

Solución

5.037 se acomoda de izquierda a derecha haciendo coincidir al 5 con el periodo de las unidades.

Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos
5	0	3	7

El número está formado por 5 unidades, 0 décimos, 3 centésimos y 7 milésimos. Se lee: "cinco enteros treinta y siete milésimos".

EJERCICIO **43**

Lee los siguientes números:

1. 0.31
2. 1.098
3. 20.004
4. 2.809
5. 12.0915
6. 3.567
7. 13.0876
8. 0.00005
9. 245.06093
10. 2.040009
11. 18.040506
12. 342.000256

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para expresar una cantidad numéricamente, se acomoda dicha cantidad en la tabla como lo ilustran los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Escribe con número "un entero, veinticinco centésimos".

Solución

El número abarca hasta el periodo de los centésimos, se acomoda la cantidad en la tabla y queda expresada como:

Unidades	Décimos	Centésimos
1	2	5

un entero, veinticinco centésimos = 1.25

2 Expresa con número "seis enteros, nueve cien milésimos".

Solución

La cantidad de acuerdo con la tabla inicia en las unidades y termina en el periodo de los cien milésimos, por lo tanto se expresa como:

Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos	Diez milésimos	Cien milésimos
6	0	0	0	0	9

seis enteros, nueve cien milésimos = 6.00009

EJERCICIO 44

Expresa con números las siguientes cantidades:

1. Cinco diez milésimos.
2. Cuarenta y ocho cien milésimos.
3. Seiscientos setenta y ocho diez milésimos.
4. Dos enteros cuatro décimos.
5. Seis enteros cuarenta y tres milésimos.
6. Cinco enteros veintinueve cien milésimos.
7. Treinta y dos mil quinientos veinticuatro cien milésimos.
8. Sesenta y seis cien milésimos.
9. Un entero cuatrocientos setenta y siete millonésimos.
10. Tres millonésimos.
11. Cuatrocientos setenta y dos enteros doscientos treinta y dos mil ciento un millonésimos.
12. Cuarenta y ocho enteros treinta mil doscientos quince millonésimos.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta

Se acomodan los elementos de la operación en forma vertical con el punto decimal como referencia y se hacen coincidir las clases, para después efectuar las operaciones correspondientes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de 2.0098 + 0.37 + 105.4056.

Solución

Se acomodan las cantidades de manera vertical y se efectúan las operaciones columna por columna de derecha a izquierda.

$$\begin{array}{r} 2.0098 \\ +\quad 0.37 \\ \underline{105.4056} \\ 107.7854 \end{array}$$

Por tanto, el resultado de la operación es 107.7854

2 ¿Cuál es el resultado de 13.284 – 5.73?

Solución

Se acomodan los números y se efectúa la operación.

$$\begin{array}{r} 13.284 \\ -\ \underline{5.73} \\ 7.554 \end{array}$$

El resultado de la resta es 7.554

EJERCICIO 45

Efectúa las siguientes operaciones:

1. 5.7 + 39.4 + 4.0318 + 21.68
2. 28.018 + 37.42 + 4.0318 + 3.028 + 5.084
3. 4.036 + 28.032 + 586.25 + 3 146.6 + 0.078
4. 481.08 + 0.216 + 39.5 + 26.49 + 0.8347
5. 8 576 + 0.3867 + 2.64 + 38 + 0.5643 + 213
6. 4.273 – 3.16
7. 12 – 8.963
8. 123.6504 – 98.45694
9. 400 – 278.00258
10. 5 276.2369 – 4 998.269889
11. $$\begin{array}{r} 3.08 \\ 48.047 \\ 6.8 \\ +\ 15.16 \\ 216.37 \\ \underline{38.415} \end{array}$$
12. $$\begin{array}{r} 98.765 \\ 146.38 \\ 2.675 \\ +\ 36.4186 \\ 2.3 \\ \underline{158.16} \end{array}$$

13.
$$\begin{array}{r} 4\,897.08 \\ 38\,926.785 \\ + \quad 4\,876.845 \\ \underline{12\,000.009} \end{array}$$

14.
$$\begin{array}{r} 396.086 \\ 4\,845.6 \\ 36.0876 \\ + \quad 0.318 \\ 26.031 \\ \underline{8\,216.208} \end{array}$$

15.
$$\begin{array}{r} 86\,543.32 \\ 858\,796.076 \\ + \quad 29\,198.007 \\ \underline{938\,009.108} \end{array}$$

16.
$$\begin{array}{r} 48.567 \\ \underline{-\ 38.3265} \end{array}$$

17.
$$\begin{array}{r} 4\,875.0086 \\ \underline{-\ 2\,356.54} \end{array}$$

18.
$$\begin{array}{r} 386.08 \\ \underline{-\ 28.00486} \end{array}$$

19.
$$\begin{array}{r} 38\,654.032 \\ \underline{-\ 654.087} \end{array}$$

20.
$$\begin{array}{r} 2\,384.6282 \\ \underline{-\ 1\,432.4908} \end{array}$$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Benito estudió 1.5 horas el lunes, 2.3 el martes, 1.25 el miércoles y una hora el jueves, ¿cuántas horas estudió para presentar su examen el viernes?

Solución

Para obtener el tiempo total que estudió se suman las horas que dedicó por día.

$$\begin{array}{r} 1.5 \\ 2.3 \\ +\ 1.25 \\ \underline{1\quad} \\ 6.05 \end{array}$$

Por consiguiente, Benito estudió 6.05 horas para preparar su examen.

2 Si un corredor recorre 3.75 km de una distancia de 5 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para finalizar la ruta?

Solución

Se efectúa la resta y se obtiene la distancia que falta por recorrer.

$$\begin{array}{r} 5.00 \\ -\ \underline{3.75} \\ 1.25 \end{array}$$

Por tanto, le faltan 1.25 km para terminar.

3 De una bolsa de azúcar de 3.00 kg, se extraen las siguientes cantidades: 0.50, 0.20 y 0.75 kilogramos, ¿qué cantidad queda en la bolsa?

Solución

Se suman las cantidades de azúcar que se extrajeron de la bolsa y el resultado se resta a los 3 kg.

$$\begin{array}{r} 0.50 \\ +\ 0.20 \\ \underline{0.75} \\ 1.45 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3.00 \\ -\ \underline{1.45} \\ 1.55 \end{array}$$

En la bolsa quedan 1.55 kg.

EJERCICIO 46

Resuelve los siguientes problemas:

1. En el año 2000 el número de habitantes de una población fue de 1.8 millones, para el año siguiente su incremento fue de 0.25 millones y para el tercer año aumentó 0.75 millones, ¿cuántos habitantes había al final del año 2002?
2. Jerónimo se prepara para una competencia de atletismo: el lunes recorre 3.75 km, el martes 2.85, el miércoles 3.5, el jueves 3 y el viernes 2.95 km. ¿Qué distancia recorre durante los 5 días?
3. De un saco de arroz se han tomado 23.55 kg, después 15.85 kg y más tarde 24.525 kg, si el saco quedó vacío, ¿cuántos kilogramos del cereal contenía?
4. Los lados de un terreno hexagonal irregular miden: 8.65, 12.50, 13, 12, 9.35 y 10 metros, respectivamente. ¿Cuál es su perímetro?
5. Rodrigo pintó 4 habitaciones de una casa, en la primera utilizó 1.5 galones de pintura, 2.15 en la segunda, 1.85 en la tercera y 2 en la última. ¿Cuántos galones ocupó en total?
6. Un trailer se carga con las siguientes toneladas de productos: 8 toneladas de comestibles, 3.5 de herramientas y 7.25 de material para la construcción. ¿Cuál es el peso total en toneladas si la caja del remolque pesa 6 toneladas?
7. El registro de precipitación pluvial del segundo cuatrimestre del año en la selva de Chiapas es:mayo 11.4 centímetros, junio 12.6, julio 15.8 y en agosto 18.75. ¿Cuál fue la precipitación pluvial durante este periodo?
8. En un edificio existen 5 departamentos con un gasto promedio mensual de energía eléctrica de: en el departamento 1 se consumen 120.8 kilowatts; en el 2, 135.6; en el 3, 118.5; en el 4, 233.6, y en el 5, 160.7, ¿cuál es el consumo mensual de energía eléctrica en todo el edificio?
9. Tania fue al mercado y compró 2.5 kilogramos de papa, 1.5 kilogramos de aguacate, 0.50 kilogramos de limón y 6.5 kilogramos de naranja. ¿Cuál es el peso total de la mercancía que compró Tania?
10. Delia regularmente consume en el desayuno 120.7 calorías; durante el almuerzo 190.3; en la comida 258.3 y durante la cena 97.2. ¿Cuál es su ingesta calórica en un día?
11. Durante el recreo una niña consume: una torta de \$18.50, un jugo de \$8, una paleta de \$3.80, caramelos de \$6.70 y frituras de \$5.50, ¿cuánto debe pagar por su consumo?
12. Para preparar un pastel se emplean estos ingredientes en kilogramos: 0.750 de harina, 0.200 de azúcar, 0.008 de royal y 3 huevos, cuyo peso es 0.065 cada uno. ¿En total cuánto pesa el pastel?
13. Las canciones del último disco de sencillos del "Marqués de la canción", duran en minutos: 4.56, 3.58, 4.05, 3.51 y 4.12, ¿cuál es el tiempo total de duración de la obra musical?
14. Un ciclista ha recorrido 35.55 kilómetros de una ruta de 78 kilómetros, ¿qué distancia le falta por recorrer?
15. De 897.025 restar 587.995.
16. Restar 126.78 de 302.01.
17. De un depósito de agua que contiene 5 865.325 litros, se han extraído 1 457.348 litros, ¿cuánta agua queda?
18. Una computadora tiene un disco duro de 368 MB de memoria, si varios programas ocupan 128.75 MB, ¿qué cantidad de memoria está libre?
19. En un depósito de 2 500 litros de agua hay 2 llaves de salida. La primera desaloja 1 585.175 litros por hora y la segunda, 748.235 litros en el mismo tiempo, ¿cuántos litros quedan en el depósito después de una hora?
20. Julieta fue al supermercado y compró un desodorante de \$23.81, una caja de pañuelos desechables de \$17.55, una caja de cereal de \$32.08 y una botella de agua de \$5.40; si pagó con un billete de \$100, ¿cuánto fue su cambio?
21. Una carrera ciclista consta de 3 etapas: en la primera se cubre una distancia de 125.50 kilómetros y la segunda de 183.75; si la distancia total que se debe cubrir es de 450 kilómetros, ¿cuál es la longitud de la última etapa?

22. Un atleta participa en la maratón de la Ciudad de México, la cual consta de 10 km; si este participante lleva recorridos 3 560 metros, ¿cuántos kilómetros le hacen falta para concluir la carrera? (Considera que 1 kilómetro equivale a 1 000 metros).
23. La estatura de Raquel es de 1.66 metros, mientras que la de Ana es de 1.27 metros. ¿Cuánto más alta es Raquel que Ana?
24. La distancia entre las ciudades de México y Morelia es aproximadamente de 380.65 kilómetros, ¿cuántos kilómetros le falta recorrer a un turista que viaja entre ambas capitales, si lleva recorridos 176.12 kilómetros?
25. Una persona tiene en su cuenta bancaria $12 359.32, si retira $2 000 y el banco le cobra una comisión de $5.50, ¿cuál es el saldo del cuentahabiente?
26. Un paciente vestido pesa 65.765 kilogramos, si el peso de la vestimenta es de 1.8 kilogramos, ¿cuál es su peso corporal?
27. ¿Qué número hay que sumar a 2 013.507 para que el resultado sea 2 147.25?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación

Se efectúa igual que la multiplicación de números enteros. Para ubicar el punto decimal se cuentan las cifras que contengan ambos factores a la derecha del punto decimal, lo que indica el lugar que debe ocupar el punto decimal, de derecha a izquierda, en el resultado.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa la siguiente operación: 23.87×5.3.

Solución

Se acomodan los factores en forma vertical y se realiza la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 23.87 \\ \times\, 5.3 \\ \hline 7161 \\ 11935 \\ \hline 126.511 \end{array}$$

Al contar las cifras que se encuentran a la derecha del punto decimal en los factores, se observa que son 3 cifras, entonces el punto decimal del resultado se coloca 3 lugares de derecha a izquierda. Por lo tanto, el resultado final es: 126.511

2 Realiza la siguiente operación: 3.002×4.56.

Solución

Se acomodan los factores en forma vertical y se multiplica.

$$\begin{array}{r} 3.002 \\ \times\, 4.56 \\ \hline 18012 \\ 15010 \\ 12008 \\ \hline 13.68912 \end{array}$$

Finalmente, el resultado de $3.002 \times 4.56 = 13.68912$

Multiplicación por múltiplos de 10

Cuando se multiplica una cantidad por un múltiplo de 10 (10, 100, 1 000, 10 000, …), el punto decimal se recorre hacia la derecha tantos lugares como ceros tenga el múltiplo de 10.

Ejemplo

¿Cuál es el resultado de 3.102×100?

Solución

El múltiplo de 10 es 100 y está formado por 2 ceros, por lo tanto, el punto decimal se recorre 2 lugares a la derecha de su posición inicial y se obtiene como resultado:

$$3.102 \times 100 = 310.2$$

EJERCICIO 47

Efectúa las siguientes operaciones:

1. 4.56×3.45
2. 42.25×6.2
3. 328.654×3.02
4. $3\,425 \times 2.005$
5. $12\,572 \times 0.0025$
6. $20\,000 \times 0.00005$
7. 4.85×10
8. 28.05×100
9. 3.8436×100
10. $3.875 \times 1\,000$
11. $5.4 \times 1\,000$
12. $28.1367 \times 1\,000$

13. $\begin{array}{r} 58.608 \\ \underline{\times\, 2.007} \end{array}$ 15. $\begin{array}{r} 248.67 \\ \underline{\times\, 27.08} \end{array}$ 17. $\begin{array}{r} 465.67 \\ \underline{\times\, 3.8506} \end{array}$ 19. $\begin{array}{r} 4.656 \\ \underline{\times\, 100} \end{array}$ 21. $\begin{array}{r} 48.26 \\ \underline{\times\, 1\,000} \end{array}$

14. $\begin{array}{r} 56.865 \\ \underline{\times\, 217.8} \end{array}$ 16. $\begin{array}{r} 56.861 \\ \underline{\times\, 26.310} \end{array}$ 18. $\begin{array}{r} 73.05 \\ \underline{\times\, 10} \end{array}$ 20. $\begin{array}{r} 216.5 \\ \underline{\times\, 100} \end{array}$ 22. $\begin{array}{r} 386.2 \\ \underline{\times\, 1\,000} \end{array}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

¿Cuál es la superficie de un terreno rectangular de 30.45 m de largo y 12.52 m de ancho?

Solución

Para obtener el área o la superficie del terreno, se multiplica el largo por el ancho.

Al colocar el punto decimal se obtiene como resultado: 381.2340,

$$\begin{array}{r} 30.45 \\ \times\ 12.52 \\ \hline 6090 \\ 15225 \\ 6090 \\ 3045 \\ \hline 381.2340 \end{array}$$

Por tanto, la superficie del terreno es de: 381.2340 m^2.

EJERCICIO **48**

Resuelve los siguientes problemas:

1. Una pintura tiene un costo de $25.75 el litro, una persona compra 48 litros, ¿cuánto es lo que paga?
2. Si 57 litros de aceite tienen un costo de $1 850 y se vende el litro a $45.80, ¿de cuánto es la ganancia?
3. Un automóvil viaja a 85.3 kilómetros por hora en una carretera, ¿qué distancia recorre en 6 horas?
4. La señora Alcántara dispone de $1 500 para surtir su despensa, de acuerdo con la siguiente lista: 6 kilogramos de azúcar le cuestan $15.50 cada uno, 4 kilogramos de arroz a $9.80 cada uno, 16 kilogramos de harina a $18.50 cada kilogramo, 5 paquetes de jabón a $8 cada paquete. ¿Cuánto dinero le queda después de la compra?
5. Una familia de 6 personas asiste a un espectáculo y cada una de ellas realiza los siguientes gastos: $12.25 de pasaje, $53.50 de comida y $150 por boleto de entrada, ¿cuánto se gastaron en total?
6. Un grupo de 250 empleados asiste a un banquete y cada cubierto tiene un costo de $180.75, ¿cuánto debe pagarse al restaurante?
7. ¿Cuál es el área de un terreno rectangular que tiene de largo 45.30 metros y de ancho 26.45 m?
8. En una construcción se emplean 38 hombres, cada uno de ellos recibe $150.80 diarios. Si el trabajo dura 25 días, ¿a cuánto asciende la nómina total y por persona, durante ese lapso?
9. Si una librería vende durante un día 35 libros de $180.50 cada uno, 56 ejemplares más de $97.50 el ejemplar y 125 volúmenes de $65 por libro, ¿a cuánto asciende su venta?
10. Los nutriólogos recomiendan que una persona debe tomar en promedio 2.5 litros de agua en un día, para que esté bien hidratada. ¿Cuántos litros de agua debe tomar una persona en un mes para que cumpla con una buena hidratación? (Considera un mes igual a 30 días).
11. Un carpintero desea saber, ¿a cuántos centímetros equivalen 20 pulgadas? (Considera una pulgada equivalente a 2.54 centímetros).
12. A un paciente con hipertensión arterial se le recomienda que tome 1.5 pastillas diarias de un fármaco llamado metil-dopa, el cual controla este mal. ¿Cuántas pastillas consumirá durante 15 días, si cumple con las indicaciones?
13. El volumen de una caja se obtiene de la multiplicación del largo por el ancho y por el alto. Si se tiene una caja con 30.48 centímetros de largo, 17.78 de ancho y 12.7 de alto, ¿cuál es el volumen?

14. Una escalera tiene 26 escalones y la separación que existe entre cada uno es de 0.28 metros, ¿qué tan alta es la escalera?
15. Una gasolinera cuenta con 6 bombas expendedoras de combustible, si cada bomba vende 800 litros diarios y el litro de gasolina es de $7.40, ¿cuál es su ingreso en un día?
16. El costo del pasaje en el metrobús es de $3.50 por persona, si cada camión tiene una capacidad máxima de 82 personas, ¿cuál es el ingreso de un autobús, si éste va totalmente lleno?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División

División de un número decimal entre un número entero

Primero se divide la parte entera entre el divisor. Al llegar al punto decimal, éste se sube al cociente y se continúa la operación como si fueran números enteros. Las cifras subsecuentes del cociente quedarán después del punto decimal. Si la parte entera es menor que el divisor, entonces la primera cifra del cociente queda inmediatamente después del punto decimal.

Ejemplo

Obtén el cociente de 38.316 entre 17.

Solución

Al efectuar los pasos descritos, se obtiene el resultado de la división.

$$\begin{array}{r|l} & \;\;2.253 \\ \hline 17 & 38.316 \\ & \;\;4\,3 \\ & \;\;0\,91 \\ & \;\;\;\;066 \\ & \;\;\;\;\;\;15 \end{array}$$

Por tanto, el cociente es 2.253 y el residuo 0.015

División de un número entero entre un número decimal

Se multiplica el divisor por 10, 100, 1 000, …, según se necesite para hacerlo entero, esta cantidad por la que se multiplicó el divisor también se multiplica por el dividendo. Y posteriormente se efectúa la división.

Ejemplo

Divide 325 entre 0.16.

Solución

Se multiplica a 325 y 0.16 por 100:

$$0.16 \times 100 = 16 \text{ y } 325 \times 100 = 32\,500$$

Entonces el cociente de 325 entre 0.16 se convierte en la división de 32 500 entre 16

$$\begin{array}{r|l} & \;\;2\,031.25 \\ \hline 16 & 32\,500 \\ & \;\;0\,50 \\ & \;\;\;\;020 \\ & \;\;\;\;\;\;040 \\ & \;\;\;\;\;\;\;\;080 \\ & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;00 \end{array}$$

Por tanto, el resultado de la división es igual a: 2 031.25

EJERCICIO 49

Efectúa las siguientes divisiones hasta con 3 decimales:

1. 58.76 entre 12
2. 38.25 entre 216
3. 49 364 entre 12
4. 5 867.56 entre 39.6
5. 23.56 entre 10
6. 1 entre 0.005
7. 125 entre 1.25
8. 368.5476 entre 480.5
9. 1 276 entre 0.25
10. 4.008 entre 0.016
11. 658.23 entre 217
12. 4 entre 0.26
13. 4.5 entre 0.28
14. 8.46 entre 0.07
15. 38 entre 0.175
16. 38 entre 2.6
17. 496.5 entre 2.086
18. 7 856.421 entre 1 315

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Un empleado percibe \$3 850.20 por 6 días de trabajo. ¿Cuál es su salario por día?

Solución

Para obtener el salario por día del empleado, se divide el sueldo que percibe entre los 6 días de trabajo.

$$\begin{array}{r|l} & 641.70 \\ \hline 6 & 3\,850.20 \\ & 25 \\ & 10 \\ & 4\,2 \\ & 00 \end{array}$$

Por consiguiente, el salario diario del empleado es de \$641.70

EJERCICIO 50

Resuelve los siguientes problemas:

1. El precio de un artículo es de \$6.25 y se pagaron \$143.75 por varios de ellos, ¿cuántos se adquirieron?
2. El precio de 385 artículos comerciales es de \$1 232. ¿Cuál es el precio unitario?
3. Un metro de tela tiene un precio de \$15.25, si se compra un rollo de dicha tela en \$915, ¿cuántos metros tiene?
4. Si se desea embotellar 4 500 litros de refresco en envases de 0.75 litros de capacidad, ¿cuántos envases se necesitan?
5. Para embotellar 847 litros de refresco se emplearon 484 botellas. ¿Cuál es la capacidad de cada una de ellas?
6. Si un automóvil recorre 850 kilómetros en 12.5 horas, ¿cuál es su velocidad?
7. Un rectángulo tiene una superficie de 60.5 cm^2, si su ancho mide 5 cm, ¿cuánto mide su longitud?
8. Las temperaturas que se registraron durante la semana fueron: 22.5, 18.6, 20.1, 23.4, 28, 24.2 y 23.7 grados Celsius. ¿Cuál fue el promedio de temperatura?
9. Un grupo de 42 personas va de excursión a un zoológico y en la taquilla pagan \$2 457. ¿Cuál es el costo de entrada por persona?

10. Aurelio pagó $94.50 en una sala de videojuegos, en donde por esa cantidad le dieron 21 fichas para jugar. ¿Cuál es el precio que pagó por cada ficha?
11. Un sanitario es abastecido por un tinaco, cuya capacidad es de 300 litros de agua; si cada descarga del líquido es de 12.5 litros, ¿para cuántas descargas alcanza el agua?
12. Un libro que contiene 200 páginas tiene 2.5 centímetros de grosor. ¿Cuál es el grueso de cada una de sus hojas? No consideres las pastas.
13. Una naranja tiene un peso aproximado de 0.125 kilogramos, ¿cuántas naranjas habrán en una tonelada, si se considera el mismo peso para cada una?
14. El ingreso durante un día en una caseta de la autopista México-Querétaro es de $98 439; si por esta caseta cruzan 1 254 automóviles, ¿cuál es el costo de peaje por automóvil?
15. ¿Por cuál número hay que multiplicar 125.42 para que el resultado sea 2 676.4628?
16. Un empleado gubernamental percibe quincenalmente $6 641.25 por concepto de su salario. ¿Cuál es su sueldo diario?
17. Un contratista pagó por un pedido de ladrillo $29 767.50, si cada millar cuesta $850.50, ¿cuántos millares de material compró?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Un carpintero compra 2 kilogramos de clavos, 3 kilos de tornillos y 10 piezas de lijas, si el kilogramo de clavos tiene un costo de $12.50, el de tornillos de $14.25 y cada pieza de lija cuesta $2.25, ¿cuánto pagó en total?

Solución

Se calculan los precios de cada artículo y se suman para obtener el costo total.

Clavos	Tornillos	Lijas	Costo total
			25.00
12.50	14.25	2.25	+ 42.75
× 2	× 3	× 10	22.50
$25.00	$42.75	$22.50	$90.25

Por consiguiente, el carpintero pagó $90.25

2 Cuatro amigos compraron en el supermercado 3 refrescos de $14.50 cada uno, 2 bolsas grandes de papas de $28.50 cada una, 3 bolsas de cacahuates de $6.75 cada una, un paquete de vasos desechables de $9.25 y un paquete de platos de $18, si el gasto se lo repartieron en partes iguales, ¿cuánto le tocó aportar a cada uno?

Solución

Se calcula el gasto total y se divide entre 4 para obtener la cantidad que deben aportar individualmente los amigos.

Refrescos	Papas	Cacahuates	Vasos y platos	Total	División
				43.50	
				57.00	37.00
14.50	28.50	6.75	9.25	+ 20.25	4 ⟌148.00
× 3	× 2	× 3	+ 18.00	27.25	28
$43.50	$57.00	$20.25	$27.25	$148.00	0 00

Por consiguiente, a cada uno de los amigos le corresponde aportar $37

3 Javier y sus 4 amigos deciden ir a ver un partido de futbol. Para llegar toman diversos transportes que cobran por persona: \$4.50, \$2.50 y \$3.50. Si Javier pagó los pasajes con un billete de \$100, ¿cuánto le sobró?

Solución

Se suman los pasajes de cada persona y se multiplican por 5, el resultado se resta a \$100 y se obtiene el dinero que le sobró a Javier.

Pasajes por persona	Total de pasajes	Cambio de Javier
4.50		
+ 2.50	10.50	100.00
3.50	× 5	− 52.50
\$10.50	\$52.50	\$47.50

Por tanto, a Javier le sobraron \$47.50

EJERCICIO 51

Resuelve los siguientes problemas:

1. Lourdes necesita fotocopiar unos manuales que contienen 180 hojas en tamaño carta y 250 hojas en tamaño oficio. El costo por fotocopia en tamaño carta es de \$0.20, mientras que la de tamaño oficio es de \$0.25. Si Lourdes paga con un billete de \$200, ¿cuánto dinero va a recibir de cambio?
2. Rebeca surte una lista de útiles escolares que contiene 5 libros, cuyo precio unitario es \$30.50, 6 lápices de \$5.60 por unidad, 3 plumas de las cuales cada pieza cuesta \$6.20 y además un millar de hojas de \$105, ¿cuánto pagó Rebeca en total?
3. Elizabeth rompe su alcancía y se da cuenta de que tiene 16 monedas de \$10, 13 de \$5, 42 de \$2, 33 de \$1, 15 monedas de \$0.50 (50 centavos) y 16 de \$0.20 (20 centavos). ¿Cuál es el monto de su ahorro?
4. Las calificaciones de Héctor son: matemáticas 8.5, español 9.0, geografía 8.2, literatura 7.5, física 8.4 y química 9.4. ¿Cuál es el promedio de sus calificaciones?
5. El perímetro de un rectángulo se define como el doble de la suma de la longitud del largo más el ancho. ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo cuyo largo es 13.456 centímetros y ancho 8.044 centímetros?
6. En una tienda departamental se lleva a cabo una campaña de beneficencia por parte de una fundación civil. Ésta consiste en redondear las cuentas de los clientes, pero además por cada peso y centavo que aporta una persona la fundación pone la misma cantidad de dinero que el cliente. Si un cliente consume en la tienda \$425.82 y decide voluntariamente redondear su cuenta a \$430, ¿cuál es el monto total de lo aportado a dicha labor altruista?
7. Un vagón de tren vacío pesa 6 425 kilogramos, si este vagón se carga con 3 contenedores, cuyo peso unitario es de 845.75 kilogramos y con 2 cilindros de combustible que pesan 650.8 kilogramos, ¿cuál es el peso del vagón ya cargado?
8. Un metal sufre una deformación llamada dilatación al ser expuesto durante largos periodos al calor. Si una vía de ferrocarril mide 6.32 centímetros de ancho y se expande una décima parte, ¿cuál será su ancho en un día extremadamente caluroso?
9. Un regalo es empacado en una caja de cartón, cuyo peso es de 25.2 gramos y después se envuelve en un papel de terciopelo que pesa 6.37 gramos. Si todo el paquete pesa 800 gramos, ¿cuál es el peso del regalo?
10. Cuando un comerciante compra 50 juguetes, le cobran 15 centésimos extra del costo total por concepto de impuestos; si el pago fue de \$2 541.50 incluyendo los impuestos, ¿cuál es el costo de cada uno de los juguetes?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Conversiones

Cualquier fracción común puede representarse como un número decimal y viceversa. A continuación se explican y ejemplifican las diferentes formas.

Dada la fracción común, para convertirla en número decimal se divide el numerador entre el denominador.

EJEMPLOS

1 Convierte $\frac{3}{4}$ a número decimal.

Solución

Se efectúa la división y se obtiene el número decimal.

$$\begin{array}{r} 0.75 \\ 4\overline{)3.00} \\ 20 \\ 0 \end{array}$$

Por tanto, $\frac{3}{4} = 0.75$

2 Convierte $1\frac{2}{3}$ a número decimal.

Solución

Se transforma la fracción mixta en impropia $1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, se efectúa la división para obtener el resultado.

$$\begin{array}{r} 1.666 \\ 3\overline{)5.000} \\ 2\,0 \\ 20 \\ 20 \\ 2 \end{array}$$

Esta fracción representa un decimal periódico, por lo tanto, $1\frac{2}{3} = 1.666... = 1.\overline{6}$

EJERCICIO 52

Convierte a número decimal las siguientes fracciones:

1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{1}{5}$
3. $\frac{1}{2}$
4. $\frac{2}{5}$
5. $\frac{5}{4}$
6. $\frac{3}{5}$
7. $\frac{9}{6}$
8. $\frac{1}{10}$
9. $\frac{3}{8}$
10. $1\frac{4}{5}$
11. $1\frac{5}{8}$
12. $2\frac{5}{16}$
13. $1\frac{9}{10}$
14. $3\frac{5}{11}$
15. $2\frac{7}{8}$
16. $4\frac{7}{12}$
17. $3\frac{8}{25}$
18. $4\frac{7}{30}$
19. $5\frac{11}{30}$
20. $7\frac{5}{18}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para convertir un número decimal exacto a fracción común, se colocan los denominadores 10, 100, 1 000, …, según corresponda la fracción decimal, el numerador se multiplica por la misma cantidad colocada en el denominador y la fracción resultante se simplifica, de ser posible.

EJEMPLOS

1 Expresa en fracción común 0.5.

Solución

La fracción decimal corresponde a cinco décimos, por lo tanto, se multiplica y divide por 10

$$0.5 = \frac{0.5 \times 10}{10} = \frac{5}{10} = \frac{5 \div 5}{10 \div 5} = \frac{1}{2}$$

Por consiguiente, $0.5 = \frac{1}{2}$

2 Expresa en fracción común 0.003.

Solución

El número es tres milésimos, entonces se multiplica y divide por mil.

$$0.003 = \frac{0.003 \times 1000}{1000} = \frac{3}{1000}$$

La fracción resultante no se puede simplificar, por lo tanto, $0.003 = \frac{3}{1000}$

3 Expresa en fracción común 1.75.

Solución

Se multiplica y divide por 100 ya que la fracción decimal corresponde a setenta y cinco centésimos.

$$1.75 = \frac{1.75 \times 100}{100} = \frac{175}{100} = \frac{175 \div 25}{100 \div 25} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$$

El resultado es $\frac{7}{4}$ o $1\frac{3}{4}$

EJERCICIO 53

Convierte las siguientes fracciones decimales a fracciones comunes.

1. 0.20
2. 0.33
3. 0.25
4. 0.44
5. 0.66
6. 1.5
7. 2.75
8. 3.08
9. 0.005
10. 1.346

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para convertir un número decimal periódico a una fracción común se utiliza la siguiente fórmula:

$$\text{Número decimal periódico} = \frac{R - v}{10^h - 10^c}$$

Donde:

R: es el entero que resulta de recorrer el punto decimal hasta la última cifra del periodo.

h: lugares recorridos para obtener R.

v: es el entero que resulta de recorrer el punto hasta una cifra antes del periodo.

c: lugares recorridos para obtener v.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte $0.\overline{3}$ a fracción común.

Solución

Al asignar los valores respectivos a cada uno de los términos.

$$R = 3,\ h = 1,\ v = 0 \text{ y } c = 0$$

Al sustituir, se obtiene:

$$0.\overline{3} = \frac{3-0}{10^1 - 10^0} = \frac{3}{10-1} = \frac{3}{9} = \frac{3 \div 3}{9 \div 3} = \frac{1}{3}$$

Por consiguiente, $0.\overline{3} = \frac{1}{3}$

2 Convierte $5.3\overline{52}$ a fracción común.

Solución

Al asignar los valores a cada uno de los términos en la fórmula:

$$R = 5\,352,\ h = 3,\ v = 53,\ c = 1$$

Al sustituir, se obtiene:

$$5.3\overline{52} = \frac{5\,352 - 53}{10^3 - 10^1} = \frac{5\,299}{1000 - 10} = \frac{5\,299}{990}$$

El resultado de la conversión es: $5.3\overline{52} = \frac{5\,299}{990} = 5\frac{349}{990}$

La fórmula para convertir una fracción decimal periódica a fracción común, también se emplea para convertir una fracción decimal exacta a fracción común, donde el periodo de la función es cero.

Ejemplos

$$0.36 = 0.36\overline{0}, \quad 1.375 = 1.375\overline{0}, \quad 0.0024 = 0.0024\overline{0}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte el número 0.25 a fracción común mediante la fórmula.

Solución

La fracción decimal es exacta, para que sea una fracción periódica agregamos un cero periódico, esto es, $0.25\overline{0}$ y de este número obtenemos valores.

$$R = 250,\ h = 3,\ v = 25 \text{ y } c = 2$$

Al sustituir en la fórmula:

$$0.25\overline{0} = \frac{250 - 25}{10^3 - 10^2} = \frac{225}{1\,000 - 100} = \frac{225}{900} = \frac{225 \div 225}{900 \div 225} = \frac{1}{4}$$

Por tanto, $0.25 = \frac{1}{4}$

Si el periodo en una cifra es el número 9, dicha cifra se redondea al siguiente número decimal.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte $0.2\overline{9}$ a fracción común.

Solución

Se asignan los valores a las variables de la fórmula.

$$R = 29,\ h = 2,\ v = 2 \text{ y } c = 1$$

Al sustituir los valores, se determina que:

$$0.2\overline{9} = \frac{29 - 2}{10^2 - 10^1} = \frac{27}{100 - 10} = \frac{27}{90} = \frac{27 \div 9}{90 \div 9} = \frac{3}{10}$$

El resultado de $0.2\overline{9} = \frac{3}{10}$, se observa que $0.2\overline{9}$ se redondea a $0.3 = \frac{3}{10}$

2 ¿Cuál es el resultado de convertir $1.\overline{9}$ a fracción común?

Solución

Se asignan los valores a las variables:

$$R = 19,\ h = 1,\ v = 1 \text{ y } c = 0$$

Al sustituir en la fórmula:

$$1.\overline{9} = \frac{19 - 1}{10^1 - 10^0} = \frac{18}{10 - 1} = \frac{18}{9} = 2$$

Por consiguiente, $1.\overline{9} = 2$

EJERCICIO 54

Convierte a fracción común las siguientes fracciones decimales.

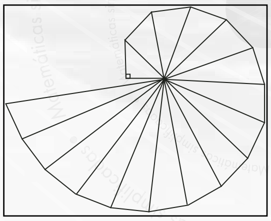
1. $0.\overline{8}$
2. $0.\overline{18}$
3. $1.\overline{2}$
4. $4.\overline{21}$
5. $0.\overline{2}$
6. $3.\overline{121}$
7. $9.\overline{032}$
8. $3.12\overline{14}$
9. $5.\overline{19}$
10. $3.\overline{47}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 6

Potenciación y radicación

Reseña HISTÓRICA



El exponente

El primero que colocó el exponente en una posición elevada con respecto a la línea base fue Chuquet en el siglo XV. Sin embargo, lo colocaba directamente al coeficiente, de modo que $5x^2$, lo escribía como 5^2.

En 1636 James Hume publicó una edición del álgebra de Viète en la que utilizó una notación prácticamente igual a la actual, salvo que utilizó números romanos. Así, $5x^2$ lo escribía como $5x^{ii}$.

Sería Descartes quien sustituyó en su obra *Géométrie* los incómodos numerales romanos por los indoarábigos. No deja de ser curioso, sin embargo, que para la potencia cuadrada no utilizase la notación elevada, sino que siguiese escribiendo, como muchos hasta entonces, x^2 como xx.

El símbolo $\sqrt{\ }$ y los irracionales

Al parecer fueron los griegos en el siglo V a. de C., los descubridores de la existencia de números no racionales. Este descubrimiento hizo tambalear uno de los principios de los pitagóricos, que consistía en considerar que la esencia de todas las cosas, tanto en la geometría como en los asuntos teóricos y prácticos del hombre, era explicable en términos de *arithmos*, es decir, de propiedades de los números enteros y de sus razones.

Puesto que la existencia de tales números era evidente, los griegos no tuvieron más remedio que aceptarlos con el nombre de irracionales.

De esta manera, el campo de los números se extendió para superar la incapacidad de los racionales para representar todas las medidas de magnitudes. En el siglo IX, el filósofo árabe al-Farabi generalizó el concepto de número a los racionales y a los irracionales positivos.

En 1525 el matemático alemán Christoph Rudolff introdujo el signo $\sqrt{\ }$ que indica la raíz cuadrada de un número. El mismísimo Euler conjeturó en 1775 que se trataba de una forma estilizada de la letra *r*, inicial del término latino *radix*, "radical".

Una construcción clásica que tiene que ver con los irracionales es la llamada espiral de Teodoro, la cual permite obtener las raíces cuadradas de los números enteros a partir de un triángulo rectángulo isósceles de lado 1.

La espiral de Teodoro es un método para construir geométricamente los segmentos de longitud $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$,... $\sqrt{17}$.

Potenciación

Es la operación en la cual la cantidad llamada base se debe multiplicar por ella misma las veces que lo indique el exponente. De lo anterior se define:

- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a...}_{n\text{-veces}}$, donde: a es la base y n el exponente.
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla 5^2.

Solución

Al ser el exponente 2, la base 5 se debe multiplicar 2 veces ella misma:

$$5^2 = (5)(5) = 25$$

Por tanto, el resultado de $5^2 = 25$

2 ¿Cuál es el resultado de $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$?

Solución

La fracción se debe multiplicar 3 veces por ella misma.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

El resultado es $\dfrac{1}{8}$

3 Desarrolla 3^{-4}.

Solución

Se aplica la definición y luego se desarrolla 3^4 para obtener el resultado.

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{(3)(3)(3)(3)} = \frac{1}{81}$$

Por consiguiente, $3^{-4} = \dfrac{1}{81}$

Cuando un número negativo se eleva a una potencia par, el resultado es positivo, pero si se eleva a una potencia impar, el resultado es negativo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $(-6)^4$?

Solución

La potencia es par, por tanto, el resultado es positivo.

$$(-6)^4 = 6^4 = 1296$$

2 Efectúa $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$.

Solución

El exponente es impar, por consiguiente, el resultado será negativo.

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\left(\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$$

3 Desarrolla $(-4+1)^2$.

Solución

Se efectúa la operación encerrada en el paréntesis y después se resuelve la potencia para obtener el resultado.

$$(-4+1)^2 = (-3)^2 = 3^2 = 9$$

EJERCICIO 55

Desarrolla las siguientes expresiones:

1. $(-4)^2$
2. -5^6
3. $(6)^{-4}$
4. $(-1)^8$
5. $(-9)^3$
6. -2^{-5}
7. $(-3)^4$
8. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$
9. $\left(-\frac{1}{4}\right)^4$
10. $\left(\frac{1}{3}\right)^3$
11. $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$
12. $\left(\frac{7}{3}\right)^3$
13. $\left(\frac{5}{9}\right)^5$
14. $-(1+2)^2$
15. $(3-1)^2$
16. $(5+11)^3$
17. $(0.5+3.8)^2$
18. $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)^3$
19. $\left(5+\frac{1}{4}\right)^2$
20. $\left(\frac{1}{10}+1\right)^3$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teoremas

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Ejemplo

Demuestra que se cumple $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2}$.

Solución

Se realiza la potenciación $2^3 \cdot 2^2 = (8)(4) = 32$ y $2^{3+2} = 2^5 = 32$

Por lo tanto, se demuestra que $2^3 \cdot 2^2 = 2^5 = 32$

- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Ejemplo

Demuestra que se cumple $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2}$.

Solución

Se realiza $\frac{3^5}{3^2} = \frac{243}{9} = 27$ y $3^{5-2} = 3^3 = 27$.

Se observa que ambos resultados son iguales, por lo tanto, se cumple que: $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2}$

- $\boldsymbol{a^0 = 1}$

Ejemplo

Demuestra que $7^0 = 1$.

Solución

Para esta demostración se emplea arbitrariamente que $1 = \frac{343}{343} = \frac{7^3}{7^3} = 7^{3-3} = 7^0$

Por consiguiente, $7^0 = 1$

- $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$

Ejemplo

Demuestra que $(4^3)^2 = 4^{(3)(2)}$.

Solución

Se realiza $(4^3)^2 = (64)^2 = 4\,096$, además $4^{(3)(2)} = 4^6 = 4\,096$

Por último: $(4^3)^2 = 4\,096 = 4^{(3)(2)}$

- $\boldsymbol{(a \cdot b \cdot c)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m}$

Ejemplo

Verifica que se cumple $(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

Solución

Se realiza el producto de $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ y después se eleva $(30)^2 = 900$

Además: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$

Entonces, se cumple que $(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

- $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}}$

Ejemplo

Demuestra que se cumple $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$.

Solución

Primero se eleva $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}$; por otro lado, $\frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

Entonces, se verifica que $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

Operaciones

Son aquellas que se realizan con la aplicación de los teoremas de los exponentes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la simplificación de $\left(2^3 \cdot 5^{-2}\right)\left(2^{-2} \cdot 5^4\right)$.

Solución

La operación es una multiplicación, entonces los exponentes se suman:

$$\left(2^3 \cdot 5^{-2}\right)\left(2^{-2} \cdot 5^4\right) = 2^{3+(-2)} \cdot 5^{-2+4} = 2^1 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50$$

El resultado es 50

2 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{2^5 \cdot 3^{-4}}{2^3 \cdot 3^{-3}}$.

Solución

Se aplican los teoremas de exponentes:

$$\frac{2^5 \cdot 3^{-4}}{2^3 \cdot 3^{-3}} = 2^{5-3} \cdot 3^{-4-(-3)} = 2^2 \cdot 3^{-1} = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Por tanto, el resultado de la expresión es $\dfrac{4}{3}$

3 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{27^2}{9^3}$.

Solución

En este ejercicio el 27 y el 9 se descomponen en factores primos para después aplicar los teoremas y finalmente obtener el resultado:

$$\frac{\left(3^3\right)^2}{\left(3^2\right)^3} = \frac{3^6}{3^6} = 3^{6-6} = 3^0 = 1$$

4 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{6^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 9^2}$.

Solución

Se descomponen 6 y 9 en sus factores primos, se simplifica y se obtiene el resultado:

$$\frac{6^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 9^2} = \frac{(2 \cdot 3)^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot \left(3^2\right)^2} = \frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^4} = \frac{2^3 \cdot 3^5}{2^3 \cdot 3^4} = 2^{3-3} \cdot 3^{5-4} = 2^0 \cdot 3^1 = 3$$

5 ¿Cuál es el resultado de $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}$?

Solución

Se elevan ambas fracciones, se multiplican y posteriormente se dividen para obtener el resultado.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \frac{1^2}{3^2} \cdot \frac{3^{-3}}{2^{-3}} = \frac{3^{-3}}{3^2 \cdot 2^{-3}} = 3^{-3-2} \cdot 2^3 = 3^{-5} \cdot 2^3 = \frac{1}{3^5} \cdot 2^3 = \frac{8}{243}$$

6 Simplifica la expresión $\left[\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right]^{-2}$.

Solución

Se simplifica la operación que encierra el corchete y se eleva al exponente –2 para obtener el resultado final.

$$\left[\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right]^{-2}=\left[\dfrac{\frac{1^3}{2^3}}{\frac{2^2}{3^2}}\right]^{-2}=\left[\frac{1^3\cdot 3^2}{2^3\cdot 2^2}\right]^{-2}=\left[\frac{3^2}{2^5}\right]^{-2}=\frac{\left(3^2\right)^{-2}}{\left(2^5\right)^{-2}}=\frac{3^{-4}}{2^{-10}}=\dfrac{\frac{1}{3^4}}{\frac{1}{2^{10}}}=\frac{2^{10}}{3^4}=\frac{1024}{81}$$

Por tanto, el resultado final es $\frac{1024}{81}$

7 Simplifica $\left(\dfrac{2^{-4}}{2^{-2}-2^{-3}}\right)^{-2}$.

Solución

En este ejercicio primero se aplica el teorema correspondiente a los números que se encuentran dentro del paréntesis, después se realizan las operaciones.

$$\left(\dfrac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}}\right)^{-2}=\left(\dfrac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}\right)^{-2}=\left(\dfrac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{8}}\right)^{-2}=\left(\dfrac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{2^3}}\right)^{-2}=\left(\frac{2^3}{2^4}\right)^{-2}=\left(2^{-1}\right)^{-2}=2^2=4$$

Por consiguiente, $\left(\dfrac{2^{-4}}{2^{-2}-2^{-3}}\right)^{-2}=4$

EJERCICIO **56**

Simplifica las siguientes expresiones, emplea las definiciones y teoremas de los exponentes:

1. $5^2\cdot 5^2$
2. $3^{-5}\cdot 3^2$
3. $3^2\cdot 3^{-3}\cdot 3^{\frac{2}{3}}$
4. $\left(2^7\cdot 3^{-4}\right)\left(2^{-5}\cdot 3^4\right)$
5. $\left(3^5\cdot 5^{-4}\right)\cdot\left(2^3\cdot 3^{-7}\cdot 5^6\right)$
6. $\left(4^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)\left(2^{-1}\cdot 3^{-\frac{7}{3}}\right)$
7. $4^2\cdot 2^3\cdot 8^2$
8. $\frac{6^7}{6^4}$
9. $\frac{5^8}{5^{10}}$
10. $\frac{3^{-6}}{3^{-10}}$
11. $\frac{5^4}{5^4}$
12. $\frac{2^7\cdot 3^{-5}}{2^5\cdot 3^{-4}}$
13. $\frac{3^5\cdot 4^{-6}}{3^7\cdot 4^{-8}}$
14. $\frac{7^5\cdot 3^3}{7^3\cdot 3^5}$

15. $\dfrac{2^{-8}\cdot 3^{5}\cdot 5^{-6}}{2^{-7}\cdot 3^{6}\cdot 5^{-5}}$

16. $\dfrac{2^{-4}\cdot 3^{-5}\cdot 5^{-6}}{2^{-6}\cdot 3^{-3}\cdot 5^{-6}}$

17. $\dfrac{2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{-\frac{3}{2}}}{2^{-\frac{7}{4}}\cdot 5^{-\frac{5}{2}}}$

18. $\dfrac{2^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{4}}\cdot 4^{2}}{2^{\frac{5}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{4}}\cdot 4^{\frac{3}{2}}}$

19. $\dfrac{4^{-\frac{1}{6}}\cdot 9^{\frac{3}{8}}\cdot 6^{-3}}{4^{\frac{5}{6}}\cdot 9^{-\frac{5}{8}}\cdot 6^{-3}}$

20. $\dfrac{8^4}{4^4}$

21. $\dfrac{12^3\cdot 3^3}{6^3\cdot 2^2}$

22. $\left(2^2\right)^2$

23. $\left((-5)^2\right)^3$

24. $\left(-5^2\right)^3$

25. $(4^{\frac{1}{3}})^6$

26. $(5^{-\frac{1}{5}})^{-10}$

27. $(3\cdot 5)^2$

28. $\left(2^{-3}\cdot 3^2\right)^2$

29. $\left(2^4\cdot 3^{-6}\cdot 5^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

30. $\left(3^{-2}\cdot 5^2\right)^3\left(3^3\cdot 5^{-3}\cdot 7\right)^2$

31. $\left(\dfrac{2^2\cdot 3^5\cdot 4^2}{2^4\cdot 3^2}\right)^2$

32. $\left(\dfrac{2^{-1}\cdot 3^{\frac{1}{4}}}{2^{-3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}$

33. $\left(\dfrac{3^{-4}\cdot 5^{-1}}{3^2\cdot 5^{-3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{3^4\cdot 5^3}{3^2\cdot 5^4}\right)^{-1}$

34. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

35. $\left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\right]^4$

36. $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]^3$

37. $\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^4\right]^{-\frac{1}{2}}$

38. $\left(\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}}\right)^2$

39. $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right]^2$

40. $\left(-\dfrac{1}{3^{-3}}\right)^{-2}$

41. $\left(\dfrac{1}{2^{-3}}-\dfrac{1}{2^{-1}}\right)^{-3}$

42. $\left(\dfrac{7^{-1}}{2^{-1}+3^{-1}+6^{-1}}\right)^{-2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Radicación

Operación que permite hallar un valor que multiplicado tantas veces como lo indica el índice, dé el valor que se encuentra dentro del radical, el cual recibe el nombre de radicando. Para lo anterior se define:

- $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, donde: a es la base, m el exponente y n el índice.

Ejemplo

Verifica que se cumpla la igualdad $\sqrt[3]{8^2}=8^{\frac{2}{3}}$

Solución

Se descomponen ambas bases en factores primos y se aplica el teorema correspondiente de exponentes y la definición:

$$\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{\left((2)^3\right)^2}=\sqrt[3]{2^6}=2^{\frac{6}{3}}=2^2=4 \quad \text{además} \quad 8^{\frac{2}{3}}=\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{6}{3}}=2^2=4$$

Se observa que los 2 resultados son iguales, entonces se demuestra que $\sqrt[3]{8^2}=8^{\frac{2}{3}}=4$.

Las raíces pares de números negativos no pertenecen al conjunto de los números reales ya que son cantidades imaginarias, las raíces impares de números negativos son negativas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Aplica la definición de radicación y calcula $\sqrt[4]{625}$.

Solución

Se descompone la base en factores primos y se aplica la definición para obtener el resultado final.

$$\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{5^4}=5^{\frac{4}{4}}=5$$

2 Encuentra la raíz quinta de −1 024.

Solución

Se descompone −1 024 en sus factores primos y se aplica la definición:

$$\sqrt[5]{-1024}=-\sqrt[5]{1024}=-\sqrt[5]{2^{10}}=-2^{\frac{10}{5}}=-2^2=-4$$

Por consiguiente, el resultado es – 4

Teoremas

Los teoremas de los exponentes también se aplican a radicales, ya que se expresan como exponentes fraccionarios.

- $\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c}=(a\cdot b\cdot c)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}\cdot c^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n\cdot m}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Aplica los teoremas de los exponentes y obtén el resultado de $\sqrt[3]{216}$.

Solución

Se descompone 216 en sus factores primos, se aplica el teorema correspondiente y la definición para obtener el resultado.

$$\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^3}=2^{\frac{3}{3}}\cdot 3^{\frac{3}{3}}=2\cdot 3=6$$

Por tanto, $\sqrt[3]{216}=6$

2 ¿Cuál es el resultado de $\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{3^5}\cdot 125^{\frac{1}{2}}\right)$?

Solución

Se descompone 125 es sus factores primos y el radical se expresa como exponente fraccionario, se aplican las leyes de los exponentes y se obtiene el resultado final.

$$\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{3^5}\cdot 125^{\frac{1}{2}}\right)=\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{5}{4}}\cdot 3^{\frac{5}{2}}\cdot\left(5^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$=\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{5}{4}}\cdot 3^{\frac{5}{2}}\cdot 5^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$=2^{\frac{1}{4}+\left(-\frac{5}{4}\right)}\cdot 3^{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}=2^{-\frac{4}{4}}\cdot 3^{\frac{2}{2}}\cdot 5^{\frac{2}{2}}$$
$$=2^{-1}\cdot 3\cdot 5=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5=\frac{15}{2}$$

3 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$?

Solución

Se descompone la base en factores primos y se aplica el teorema de radicales para obtener el resultado.

$$\sqrt[3]{\sqrt{729}}=\sqrt[3]{\sqrt{3^6}}=\left(3^6\right)^{\frac{1}{(3)(2)}}=\left(3^6\right)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{6}{6}}=3$$

Por tanto, el resultado de la operación es 3

4 Simplifica la expresión $\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}\cdot 2^3}}{\sqrt[4]{32}}$.

Solución

Se transforman los radicales a exponentes fraccionarios y se realizan las operaciones con la aplicación de los respectivos teoremas.

$$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{2}\cdot 2^3}}{\sqrt[4]{32}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^3\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(2^5\right)^{\frac{1}{4}}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(2^{\frac{1}{2}+3}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{5}{4}}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(2^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{5}{4}}}$$
$$=2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2^{\frac{7}{4}}}{2^{\frac{5}{4}}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{7}{4}-\frac{5}{4}}=2^{\frac{2}{2}}=2$$

Por último, el resultado es 2

EJERCICIO **57**

Aplica las definiciones y los teoremas de los exponentes y efectúa los siguientes ejercicios:

1. $\sqrt{49}$
2. $\sqrt{729}$
3. $\sqrt{289}$
4. $\sqrt[3]{-512}$
5. $\sqrt[4]{81}$
6. $\sqrt[4]{625}$
7. $\sqrt[4]{6561}$
8. $\sqrt[5]{-243}$
9. $\sqrt{196}$
10. $\sqrt{441}$
11. $\sqrt{576}$
12. $\sqrt[3]{216}$
13. $\sqrt[3]{-1\,728}$
14. $\sqrt[3]{3375}$
15. $\sqrt[3]{13824}$
16. $\sqrt[5]{7\,776}$
17. $\sqrt[5]{248\,832}$
18. $\sqrt[5]{4\,084\,101}$

Simplifica las siguientes expresiones:

19. $\sqrt{2^2 \cdot 3^2}$
20. $\sqrt{5^2 \cdot 3^2}$
21. $\sqrt{5^2 \cdot 6^2 \cdot 3^4}$
22. $\sqrt[3]{2^6 \cdot 3^9}$
23. $\sqrt[3]{3^6 \cdot 5^3}$
24. $\sqrt[3]{2^6 \cdot 5^6 \cdot 3^3}$
25. $\sqrt[5]{2^{10} \cdot 5^{10}}$
26. $\sqrt[6]{2^{12} \cdot 3^{24}}$
27. $\sqrt[3]{8^4 \cdot 4^3}$
28. $\dfrac{11^7 \cdot \sqrt{6}}{11^5 \cdot 6^{\frac{3}{2}}}$
29. $\sqrt{\dfrac{6^2}{3^2}}$
30. $\sqrt{\dfrac{2^2}{5^{-2}}}$
31. $\left(\sqrt{\dfrac{27}{125}}\right)\left(\sqrt[3]{\dfrac{9}{25}}\right)$
32. $\left(\sqrt[8]{9}\right)^4$
33. $\left(\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{25}\right)^2$
34. $\sqrt[3]{\sqrt{9^3}}$
35. $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$
36. $\sqrt{\dfrac{2^3 \cdot 5^5}{2^{-1} \cdot 5^3}} \cdot \left(\dfrac{2^4 \cdot 5^{-1}}{2^5 \cdot 5^{-1}}\right)$
37. $\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt[12]{\dfrac{1}{27}}}$
38. $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{10}}{2^{\frac{-5}{3}} \cdot 5^{\frac{-11}{3}}}}$
39. $\left(\dfrac{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5}}{5^2}\right)^{-1} \cdot \sqrt{\dfrac{5^{-1} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}}}$
40. $\sqrt{\dfrac{3^{-1} + 6^{-1}}{8^{-1}}}$
41. $\sqrt{\dfrac{1}{3^{-2}} + \dfrac{1}{2^{-4}}}$
42. $\sqrt{2^{-6} + 6^{-2}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Simplificación

Procedimiento que consiste en expresar un radical en su forma más simple. Para simplificar un radical, el exponente de la base debe ser mayor que el índice del radical.

EJEMPLOS

1 Simplifica $\sqrt{8}$.

Solución

Se descompone el radicando en factores primos.

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3}$$

2^3 se expresa como $2^2 \cdot 2$ y se aplica el teorema correspondiente de radicales.

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Por consiguiente, la simplificación de $\sqrt{8}$ es $2\sqrt{2}$

2 Simplifica $\sqrt{45}$.

Solución

Se descompone el radicando en factores primos y se procede a aplicar los teoremas.

$$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Por tanto, $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

3 Simplifica $\sqrt[3]{72}$.

Solución

Se descompone la base en factores primos y se simplifica la expresión.

$$\sqrt[3]{72}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3^2}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^2}=2\sqrt[3]{9}$$

El resultado es $2\sqrt[3]{9}$

4 Simplifica $\frac{1}{2}\sqrt[5]{96}$.

Solución

Se simplifica el radical y el resultado se multiplica por la fracción para obtener el resultado de la operación.

$$\frac{1}{2}\sqrt[5]{96}=\frac{1}{2}\sqrt[5]{2^5\cdot 3}=\frac{1}{2}\sqrt[5]{2^5}\cdot\sqrt[5]{3}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt[5]{3}=\sqrt[5]{3}$$

EJERCICIO 58

Simplifica las siguientes expresiones:

1. $\sqrt{20}$
2. $\sqrt{72}$
3. $\sqrt[3]{16}$
4. $\sqrt[3]{135}$
5. $\sqrt[3]{250}$
6. $\sqrt{162}$
7. $\sqrt{180}$
8. $2\sqrt[4]{405}$
9. $\frac{2}{7}\sqrt[3]{686}$
10. $\frac{1}{3}\sqrt{540}$
11. $\frac{2}{5}\sqrt[4]{1250}$
12. $\frac{1}{3}\sqrt{\sqrt{3600}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta

Estas operaciones se pueden efectuar si y sólo si el índice del radical y el radicando son iguales (radicales semejantes).

$$a\sqrt[n]{d}+b\sqrt[n]{d}-c\sqrt[n]{d}=(a+b-c)\ \sqrt[n]{d}$$

EJEMPLOS

1 Efectúa $2\ \sqrt[3]{5}+11\ \sqrt[3]{5}$.

Solución

Los radicales son semejantes, por tanto se realizan las operaciones con los números que les anteceden (coeficientes del radical).

$$2\ \sqrt[3]{5}+11\ \sqrt[3]{5}=(2+11)\sqrt[3]{5}=13\sqrt[3]{5}$$

Entonces, el resultado es: $13\sqrt[3]{5}$

2 ¿Cuál es el resultado de la operación $3\sqrt{2}+7\sqrt{2}-4\sqrt{2}$?

Solución

Al ser semejantes los radicales, se efectúan las operaciones con los coeficientes.

$$3\sqrt{2}+7\sqrt{2}-4\sqrt{2}=(3+7-4)\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

El resultado es: $6\sqrt{2}$

3 Efectúa $\frac{3}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{6}\sqrt{6}$.

Solución

Se realizan las operaciones con las fracciones y se obtiene el resultado.

$$\frac{3}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{6}\sqrt{6}=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)\sqrt{6}=\frac{7}{12}\sqrt{6}$$

Si los radicandos son diferentes, no se pueden sumar o restar los radicales de primera instancia, entonces se simplifican; si resultan semejantes se efectúan las operaciones, de lo contrario, se dejan indicadas.

EJEMPLOS

1 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}$?

Solución

Se simplifican los radicales y se realiza la operación.

$$\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}=\sqrt{2^2\cdot 5}+\sqrt{3^2\cdot 5}-\sqrt{2^4\cdot 5}=2\sqrt{5}+3\sqrt{5}-2^2\sqrt{5}=(2+3-4)\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

Por tanto, el resultado es $\sqrt{5}$

2 Efectúa $\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{56}$.

Solución

Se simplifican los radicales, se realizan las operaciones y se obtiene el resultado final.

$$\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{56}=\sqrt[3]{3^3\cdot 7}+\sqrt[3]{2^3\cdot 7}=3\sqrt[3]{7}+2\sqrt[3]{7}=5\sqrt[3]{7}$$

3 Realiza $\frac{2}{15}\sqrt{405}-\frac{1}{6}\sqrt{128}-\frac{1}{10}\sqrt{125}+3\sqrt{32}$.

Solución

Se simplifican los radicales, se multiplican por las cantidades que les anteceden y se simplifican las fracciones:

$$\begin{aligned}\frac{2}{15}\sqrt{405}-\frac{1}{6}\sqrt{128}-\frac{1}{10}\sqrt{125}+3\sqrt{32}&=\frac{2}{15}\sqrt{3^4\cdot 5}-\frac{1}{6}\sqrt{2^6\cdot 2}-\frac{1}{10}\sqrt{5^2\cdot 5}+3\sqrt{2^4\cdot 2}\\&=\frac{2}{15}\left(3^2\sqrt{5}\right)-\frac{1}{6}\left(2^3\sqrt{2}\right)-\frac{1}{10}\left(5\sqrt{5}\right)+3\left(2^2\sqrt{2}\right)\\&=\frac{18}{15}\sqrt{5}-\frac{8}{6}\sqrt{2}-\frac{5}{10}\sqrt{5}+12\sqrt{2}\\&=\frac{6}{5}\sqrt{5}-\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+12\sqrt{2}\end{aligned}$$

Se agrupan los radicales semejantes y se realizan las operaciones para obtener el resultado.

$$\begin{aligned}&=\frac{6}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+12\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{2}\\&=\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{5}+\left(12-\frac{4}{3}\right)\sqrt{2}=\frac{7}{10}\sqrt{5}+\frac{32}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

Por tanto, el resultado es $\frac{7}{10}\sqrt{5}+\frac{32}{3}\sqrt{2}$

EJERCICIO 59

Realiza las siguientes operaciones:

1. $5\sqrt{2}+7\sqrt{2}$
2. $\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4\sqrt{3}$
3. $3\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{5}$
4. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}+\frac{1}{6}\sqrt[3]{9}$
5. $4\sqrt{2}-9\sqrt{2}$
6. $7\sqrt{5}-3\sqrt{5}-6\sqrt{5}$
7. $\frac{5}{3}\sqrt[4]{7}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{7}$
8. $5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-16\sqrt[3]{2}$
9. $\frac{2}{5}\sqrt{6}+3\sqrt{6}-\frac{7}{4}\sqrt{6}$
10. $\sqrt{8}+\sqrt{18}$
11. $\sqrt{12}-\sqrt{3}$
12. $2\sqrt{5}+\sqrt{80}$
13. $4\sqrt{32}-7\sqrt{8}-3\sqrt{18}$
14. $\sqrt{27}+\sqrt{48}-\sqrt{75}$
15. $3\sqrt{12}-2\sqrt{5}-7\sqrt{3}+\sqrt{125}$
16. $5\sqrt{8}-\sqrt{27}-\sqrt{32}+3\sqrt{3}+\sqrt{2}$
17. $4\sqrt{75}+6\sqrt{18}-\sqrt{128}-\sqrt{245}-\sqrt{98}-3\sqrt{125}$
18. $\sqrt{200}+\sqrt{50}-\sqrt{98}-\sqrt{338}$
19. $\frac{1}{4}\sqrt{192}-\frac{2}{5}\sqrt{75}+\frac{1}{7}\sqrt{147}$
20. $\frac{1}{22}\sqrt{605}+\frac{1}{30}\sqrt{1\,125}-\frac{1}{34}\sqrt{1\,445}$
21. $\frac{3}{4}\sqrt{176}-\frac{2}{3}\sqrt{45}+\frac{1}{8}\sqrt{320}+\frac{1}{5}\sqrt{275}$
22. $\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{192}$
23. $3\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{54}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{375}$
24. $\frac{2}{5}\sqrt[3]{250}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{128}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{54}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación

Multiplicación de radicales con índices iguales. Cuando los índices de los radicales son iguales, se multiplican los radicandos y de ser posible se simplifica el resultado.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c}$$

EJEMPLOS

1 Efectúa $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$.

Solución

Se multiplican ambos factores:

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{(3)(5)}=\sqrt{15}$$

Por consiguiente, el resultado de la operación es $\sqrt{15}$

2 ¿Cuál es el resultado del producto $\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$?

Solución

Se realiza el producto y se simplifica el resultado.

$$\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{(6)(3)(2)}=\sqrt{36}=\sqrt{2^2\cdot 3^2}=\sqrt{2^2}\,\sqrt{3^2}=2\cdot 3=6$$

El resultado del producto es 6

3 Realiza $\left(2\sqrt[3]{4}\right)\left(3\sqrt[3]{10}\right)$.

Solución

Se multiplica y simplifica el resultado.

$$\left(2\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(3\sqrt[3]{10}\right)=6\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{10}=6\sqrt[3]{(4)(10)}=6\sqrt[3]{40}=6\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=6\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{5}=6(2)\sqrt[3]{5}=12\sqrt[3]{5}$$

Por lo tanto, el resultado es $12\sqrt[3]{5}$

Multiplicación de radicales con índices diferentes. Para multiplicar radicales con índices diferentes se busca un índice común, que resulta del mínimo común múltiplo de los índices de los radicales y recibe el nombre de "mínimo común índice".

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}$?

Solución

El mínimo común índice es 6, entonces los índices de los radicales se convierten a dicho índice.

$$\sqrt[3]{2}=\sqrt[3\times 2]{(2)^2}=\sqrt[6]{2^2} \quad \text{además} \quad \sqrt{5}=\sqrt[2\times 3]{(5)^3}=\sqrt[6]{5^3}$$

Se efectúa el producto y se observa que no se puede simplificar el radical, por consiguiente se desarrollan las potencias y se realiza la multiplicación.

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{2^2\cdot 5^3}=\sqrt[6]{4\cdot 125}=\sqrt[6]{500}$$

Finalmente, el resultado es $\sqrt[6]{500}$

2 Efectúa $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}$.

Solución

Se descompone 8 en factores primos y el mínimo común índice es 4, por lo tanto, al transformar los radicales se obtiene:

$$\sqrt[2\times 2]{(2)^2}=\sqrt[4]{2^2} \quad \text{y} \quad \sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^3}$$

Se efectúa la multiplicación y se simplifica el resultado.

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{2^2\cdot 2^3}=\sqrt[4]{2^5}=\sqrt[4]{2^4\cdot 2}=\sqrt[4]{2^4}\sqrt[4]{2}=2\sqrt[4]{2}$$

Finalmente, el resultado de la operación es $2\sqrt[4]{2}$

3 Multiplica $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}$.

Solución

Se convierten los índices de los radicales a índice 8 y se realizan las respectivas operaciones.

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}=\sqrt[2\times 4]{2^4}\cdot\sqrt[4\times 2]{2^2}\cdot\sqrt[8]{2}=\sqrt[8]{2^4}\cdot\sqrt[8]{2^2}\cdot\sqrt[8]{2}=\cdot\sqrt[8]{2^4\cdot 2^2\cdot 2}=\sqrt[8]{2^7}=\sqrt[8]{128}$$

Por tanto, el resultado es $\sqrt[8]{128}$

EJERCICIO 60

Realiza las siguientes multiplicaciones:

1. $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$
2. $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}$
3. $\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}$
4. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{21}$
5. $\sqrt{15}\cdot\sqrt{12}$
6. $\sqrt{24}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$
7. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}$
8. $\sqrt{15}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{27}$
9. $\left(3\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{6}\right)\sqrt{12}$
10. $\left(2\sqrt{6}\right)\left(3\sqrt{12}\right)\left(\frac{1}{12}\sqrt{18}\right)$
11. $\left(\frac{2}{3}\sqrt{5}\right)\left(\frac{3}{4}\sqrt{10}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}\right)$
12. $\left(2\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{20}\right)$
13. $\sqrt[3]{15}\cdot\sqrt[3]{9}$
14. $\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{20}$
15. $\left(2\sqrt[3]{10}\right)\left(5\sqrt[3]{72}\right)$
16. $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4}$
17. $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{3}$
18. $\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt{2}$
19. $\sqrt[5]{96}\cdot\sqrt[3]{3}$
20. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$
21. $\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}$
22. $\sqrt[6]{6}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{6}$
23. $\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}\right)\left(\frac{2}{6}\sqrt[6]{12}\right)$
24. $\left(\frac{1}{2}\sqrt[6]{6}\right)\left(\frac{1}{4}\sqrt[3]{2}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División

División de radicales con índices iguales. Para efectuar la división se aplica el siguiente teorema:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

EJEMPLOS

1 Realiza $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$.

Solución

Los radicales son de igual índice, entonces se dividen los radicandos.

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{10}{2}}=\sqrt{5}$$

El resultado de la operación es $\sqrt{5}$

2 ¿Cuál es el resultado de $\frac{6\sqrt{28}}{\sqrt{63}}$?

Solución

Se simplifican los radicales y se realiza la operación.

$$\frac{6\sqrt{28}}{\sqrt{63}}=\frac{6\sqrt{2^2\cdot 7}}{\sqrt{3^2\cdot 7}}=\frac{6\sqrt{2^2}\sqrt{7}}{\sqrt{3^2}\sqrt{7}}=\frac{6(2)}{3}\sqrt{\frac{7}{7}}=\frac{12}{3}\sqrt{1}=4(1)=4$$

Por tanto, el cociente es 4

Para introducir una cantidad a un radical, se debe elevar la cantidad a un exponente igual al índice del radical.

Ejemplo

Realiza $\frac{\sqrt{48}}{2}$.

Solución

El divisor se expresa como $2=\sqrt{2^2}$ y se realiza la operación para obtener el resultado.

$$\frac{\sqrt{48}}{2}=\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{2^2}}=\sqrt{\frac{48}{2^2}}=\sqrt{\frac{48}{4}}=\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

División de radicales con índices diferentes. Se transforman los radicales a un índice común y después se realiza la división.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Halla el cociente de $\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}}$.

Solución

Se transforman los índices de los radicales a 12 y se realiza la operación.

$$\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[4\times 3]{\left(2^3\right)^3}}{\sqrt[3\times 4]{\left(2^2\right)^4}}=\frac{\sqrt[12]{2^9}}{\sqrt[12]{2^8}}=\sqrt[12]{\frac{2^9}{2^8}}=\sqrt[12]{2^{9-8}}=\sqrt[12]{2}$$

El resultado de la operación es $\sqrt[12]{2}$

2 ¿Cuál es el resultado de $\frac{6\sqrt{12}+2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}}$?

Solución

Se divide cada término del numerador entre el denominador y se obtiene:

$$\frac{6\sqrt{12}+2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{\frac{12}{3}}+\frac{\sqrt[3\times 2]{(2\cdot 3)^2}}{\sqrt[2\times 3]{3^3}}=3\sqrt{4}+\frac{\sqrt[6]{2^2\cdot 3^2}}{\sqrt[6]{3^3}}$$

$$=3(2)+\sqrt[6]{\frac{2^2\cdot 3^2}{3^3}}=6+\sqrt[6]{2^2\cdot 3^{-1}}=6+\sqrt[6]{2^2\cdot\frac{1}{3}}=6+\sqrt[6]{\frac{4}{3}}$$

EJERCICIO 61

Realiza las siguientes operaciones:

1. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$
2. $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$
3. $\frac{5\sqrt{120}}{6\sqrt{40}}$
4. $\frac{7\sqrt{140}}{8\sqrt{7}}$
5. $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}$
6. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{10}\right)\div\left(2\sqrt{2}\right)$
7. $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}\right)\div\left(2\sqrt[3]{2}\right)$
8. $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{3}}$
9. $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[3]{4}}$
10. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$
11. $\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[10]{16}}$
12. $\frac{\sqrt[7]{6}}{\sqrt[14]{3}}$
13. $\frac{\sqrt{200}-\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$
14. $\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[6]{6}}{\sqrt{2}}$
15. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}}$
16. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[5]{16}}{\sqrt{8}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Racionalización

Racionalizar es representar una fracción en otra equivalente que contenga una raíz en el numerador, cuyo numerador o denominador sea un número racional respectivamente.

Racionalización del denominador. Dada una expresión de la forma $\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}$, se racionaliza de la siguiente manera:

$$\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}} = \frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a} = \frac{c}{a}\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}$$

EJEMPLOS

1 Transforma $\frac{1}{\sqrt{3}}$ en otra expresión equivalente que carezca de raíz en el denominador.

Solución

La fracción $\frac{1}{\sqrt{3}}$ se multiplica por $\sqrt{3^{2-1}} = \sqrt{3}$ tanto denominador como numerador.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Por tanto, la expresión equivalente a $\frac{1}{\sqrt{3}}$ es $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2 Racionaliza la expresión $\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Solución

Se debe separar la expresión en raíces y se multiplican por $\sqrt{5^{2-1}} = \sqrt{5}$ tanto numerador como denominador, para obtener el resultado:

$$\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Finalmente, el resultado de la racionalización es $\frac{\sqrt{10}}{5}$

Racionalización de un denominador binomio. Para racionalizar una fracción cuyo denominador es un binomio $(a \pm b)$ y alguno o ambos elementos tienen una raíz cuadrada, se multiplica por el conjugado del binomio $(a \mp b)$.

$$\frac{c}{a \pm b} = \frac{c}{a \pm b}\cdot\frac{a \mp b}{a \mp b} = \frac{c\cdot(a \mp b)}{a^2 - b^2}$$

EJEMPLOS

1 Racionaliza la expresión $\frac{3}{1+\sqrt{2}}$.

Solución

Se multiplica el numerador y el denominador de la expresión por $1-\sqrt{2}$, que es el conjugado del denominador $1+\sqrt{2}$

$$\frac{3}{1+\sqrt{2}} = \frac{3}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{3-3\sqrt{2}}{(1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3-3\sqrt{2}}{1-2} = \frac{3-3\sqrt{2}}{-1} = 3\sqrt{2}-3$$

La expresión equivalente a la propuesta es $3\sqrt{2}-3$

2 Racionaliza la expresión $\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Solución

Se multiplica por el conjugado del denominador y se simplifica para obtener el resultado.

$$\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{5}+7\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{7\sqrt{5}+7\sqrt{3}}{5-3}=\frac{7\sqrt{5}+7\sqrt{3}}{2}$$

3 Racionaliza $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Solución

Se multiplica al numerador y denominador por $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$, y se efectúa la simplificación.

$$\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{6\left(\sqrt{3}\right)^2+3\sqrt{6}-4\sqrt{6}-2\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{18-\sqrt{6}-4}{12-2}=\frac{14-\sqrt{6}}{10}$$

EJERCICIO 62

Racionaliza los siguientes denominadores:

1. $\frac{2}{\sqrt{5}}$
2. $\frac{3}{\sqrt{3}}$
3. $\frac{5}{\sqrt[3]{3}}$
4. $\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$
5. $\frac{12}{\sqrt{6}}$
6. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
7. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{20}}$
8. $\frac{6}{\sqrt[3]{4}}$
9. $\frac{10}{\sqrt{20}}$
10. $\frac{\sqrt{20}-\sqrt{30}}{\sqrt{5}}$
11. $\frac{\sqrt{45}-\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$
12. $\frac{8}{3+\sqrt{7}}$
13. $\frac{4}{\sqrt{6}+2}$
14. $\frac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$
15. $\frac{3+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$
16. $\frac{2}{3+\sqrt{2}}$
17. $\frac{1}{1-\sqrt{7}}$
18. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$
19. $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
20. $\frac{2}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Racionalización de un numerador. Dada una expresión de la forma $\frac{\sqrt[n]{a^m}}{c}$, el numerador se racionaliza de la siguiente forma:

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{c}=\frac{\sqrt[n]{a^m}}{c}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}}{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{a^n}}{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{a}{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}$$

EJEMPLOS

1 Racionaliza el numerador de $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Solución

Se multiplica el numerador y denominador de la fracción por $\sqrt{2^{2-1}}=\sqrt{2}$ y se obtiene el resultado.

$$\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2^2}}{3\sqrt{2}}=\frac{2}{3\sqrt{2}}$$

2 ¿Cuál es la expresión equivalente que resulta al racionalizar el numerador de $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}}$?

Solución

Se multiplica por $\sqrt[4]{3^{4-1}}=\sqrt[4]{3^3}$ ambos elementos de la fracción para obtener el resultado.

$$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}}=\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}}\cdot\frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}}=\frac{\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[4]{5\cdot 3^3}}=\frac{3}{\sqrt[4]{5\cdot 27}}=\frac{3}{\sqrt[4]{135}}$$

Racionalización de un numerador binomio. Para racionalizar un numerador binomio que contenga 1 o 2 raíces cuadradas en el numerador, se efectúa el mismo procedimiento que se empleó para racionalizar un denominador.

$$\frac{a\pm b}{c}=\frac{a\pm b}{c}\cdot\frac{a\mp b}{a\mp b}=\frac{a^2-b^2}{c\cdot(a\mp b)}$$

EJEMPLOS

1 Racionaliza el numerador de $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$.

Solución

Se multiplican los elementos de la fracción por $1-\sqrt{2}$ que es el conjugado del numerador.

$$\frac{1+\sqrt{2}}{3}=\frac{1+\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{(1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{3\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{1-2}{3\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{-1}{3\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{-1}{3-3\sqrt{2}}=\frac{1}{3\sqrt{2}-3}$$

Por consiguiente, el resultado de la racionalización es $\frac{1}{3\sqrt{2}-3}$

2 Racionaliza el numerador de $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

Solución

Se multiplica numerador y denominador por $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ que es el conjugado del numerador, se efectúan las multiplicaciones y se obtiene el resultado.

$$\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}\cdot\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}{4\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{15}-2\sqrt{15}+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{4(3)-5}{4(3)-4\sqrt{15}+5}$$

$$=\frac{12-5}{12-4\sqrt{15}+5}=\frac{7}{17-4\sqrt{15}}$$

EJERCICIO 63

Racionaliza el numerador en los siguientes radicales:

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
2. $\frac{\sqrt{2}}{5}$
3. $\frac{1}{5}\sqrt{7}$
4. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$
5. $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$
6. $\frac{3\sqrt[5]{2}}{4}$
7. $\sqrt{\frac{5}{12}}$
8. $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$
9. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
10. $\frac{5+\sqrt{7}}{4}$
11. $\frac{2-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$
12. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$
13. $2-\sqrt{7}$
14. $3+\sqrt{5}$
15. $\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Raíz cuadrada

La raíz cuadrada es un número que multiplicado por sí mismo es igual al radicando.

Radicando. Es el número del que se desea obtener su raíz y se escribe dentro del símbolo $\sqrt{\ }$

Algoritmo para el cálculo de la raíz cuadrada. Para obtener la raíz cuadrada exacta o aproximada de un número se realiza el siguiente procedimiento:

Ejemplo

Determina la raíz cuadrada de 426 409.

Solución

$\sqrt{42,64,09}$

Se divide el número dado en periodos de 2 cifras de derecha a izquierda.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{42,64,09} & 6 \\ -36 & \\ 6 & \end{array}$$

Se busca la raíz entera más próxima al primer periodo, en este caso es 6. Se anota a la derecha del radical y su cuadrado 36 se resta al primer periodo.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{42,64,09} & 6 \\ -36 & 12 \\ 6\ 64 & \end{array}$$

Se baja el siguiente periodo 64. Se duplica 6 y el resultado 12 se coloca en el siguiente renglón.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{42,64,09} & 65 \\ -36 & 125 \\ 6\ 64 & \end{array}$$

De 664 se separa el dígito 4 y el número que queda, 66, se divide entre 12 ($66 \div 12 = 5$), el cociente 5 se anota como la siguiente cifra en ambos renglones (si el cociente excede a 9, entonces se anota 9 o un número menor).

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{42,64,09} & 65 \\ -36 & 125 \\ 6\ 64 & \\ -6\ 25 & \\ 39 & \end{array}$$

Se multiplica 5 por el número que se encuentra en el segundo renglón 125, el producto 625 se resta a 664 (si el producto excede al número que está dentro del radical, entonces se prueba con un número menor).

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{42,64,09} & 653 \\ -36 & 125 \\ 6\ 64 & 1\ 303 \\ -6\ 25 & \\ 39\ 09 & \\ -39\ 09 & \\ 0 & \end{array}$$

Se baja el siguiente periodo 09, la raíz parcial 65 se duplica para obtener 130, para determinar la siguiente cifra de la raíz, se divide ($390 \div 130 = 3$), el cociente es la siguiente cifra de la raíz y también se coloca en el tercer renglón, a continuación se efectúa el paso anterior para obtener el resultado.

Por tanto, la raíz cuadrada de 426 409 es 653

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{345.7260}$?

Solución

$\sqrt{3,45.72,60}$

Se divide el número dado en periodos de 2 cifras de derecha a izquierda para la parte entera, y de izquierda a derecha para la parte decimal.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{3,45.72,60} & 1 \\ -1 & \\ 2 & \end{array}$$

Se busca la raíz entera más próxima al primer periodo (en este caso 1). Se anota a la derecha del radical y su cuadrado 1 se resta al primer periodo.

$\sqrt{3{,}45.72{,}60}$	1
−1	2
2 45	

Se baja el siguiente periodo 45. Se duplica 1 y el resultado 2 se coloca en el siguiente renglón.

$\sqrt{3{,}45.72{,}60}$	19
−1	29
2 45	
2 61	

Se separa el último dígito 5 de la cifra 245 y el número que queda 24, se divide entre 2 (24 ÷ 2 = 12), el cociente 12 excede a 9, por consiguiente, se coloca 9 como segunda cifra en ambos renglones y se realiza el producto.

$\sqrt{3{,}45.72{,}60}$	18
−1	28
2 45	
−2 24	
21	

El producto 261 es mayor que 245, entonces se reemplaza a 9 por 8, y se multiplica por 28, el resultado 224 se resta a 245.

$\sqrt{3{,}45.72{,}60}$	18.59
−1	28
2 45	365
−2 24	3 709
21 72	
−18 25	
3 47 60	
−3 33 81	
13 79	

Se baja el siguiente periodo 72 que está después del punto decimal, la raíz parcial 18 se duplica para obtener 36 que se coloca en el tercer renglón; para determinar la siguiente cifra de la raíz, se divide (217 ÷ 36 = 6), pero el producto del cociente 6 por 366 es mayor que 2 172, por lo tanto, 5 es la siguiente cifra de la raíz que se coloca después del punto decimal a la derecha de 8 en la raíz parcial, y también en el tercer renglón, y se efectúan los mismos pasos hasta bajar el último periodo para obtener el resultado final.

Entonces, $\sqrt{345.7260} = 18.59$ con un residuo de 0.1379

EJERCICIO 64

Obtén las siguientes raíces:

1. $\sqrt{225}$
2. $\sqrt{625}$
3. $\sqrt{729}$
4. $\sqrt{324}$
5. $\sqrt{23.43}$
6. $\sqrt{63.4365}$
7. $\sqrt{564.8}$
8. $\sqrt{324.542}$
9. $\sqrt{4\,321.87}$
10. $\sqrt{5\,432.65}$
11. $\sqrt{2\,343.659}$
12. $\sqrt{78\,588\,225}$
13. $\sqrt{61\,230\,625}$
14. $\sqrt{32\,381\,790.25}$
15. $\sqrt{18\,706\,749.52}$
16. $\sqrt{435\,573\,597.06}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Raíz cuadrada (método babilónico). Este método se basa en obtener por aproximación la raíz cuadrada del número propuesto.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula la raíz cuadrada de 72 por medio del método babilónico.

Solución

$\frac{72}{8}=9$ Se busca un número, cuyo cuadrado se aproxime a 72; en este caso es 8, luego se realiza la división de 72 entre 8

$\frac{8+9}{2}=8.5$ Ocho y el cociente 9, se promedian.

$\frac{72}{8.5}=8.47$ Se realiza el cociente de 72 y 8.5

$\frac{8.5+8.47}{2}=8.485$ Se promedia 8.47 y 8.5

$\frac{72}{8.485}=8.4855$ Se divide el radicando 72 entre este último cociente.

$\frac{8.485+8.4855}{2}=8.48525$ Este procedimiento se repite sucesivamente, hasta que los cocientes que se deben promediar sean muy aproximados, entonces el cociente que resulta será la raíz más próxima al número dado.

Finalmente, la raíz cuadrada aproximada de 72 es 8.48525

2 Aplica el método babilónico y calcula: $\sqrt{500}$.

Solución

$\frac{500}{22}=22.7272$ El número, cuyo cuadrado se aproxima a 500 es 22, entonces se efectúa la división.

$\frac{22.7272+22}{2}=22.3636$ Se promedia el cociente y el divisor.

$\frac{500}{22.3636}=22.3577$ Se divide 500 entre el promedio.

$\frac{22.3577+22.3636}{2}=22.3606$ Se promedia nuevamente el cociente y el divisor.

$\frac{500}{22.3606}=22.3607$ Se observa que el cociente es muy aproximado al divisor; por lo tanto, la raíz que se busca es aproximadamente igual a 22.3607

EJERCICIO 65

Aplica el método babilónico y determina las siguientes raíces cuadradas:

1. 35	3. 126	5. 1 263	7. 65 994	9. 456 200
2. 60	4. 553	6. 4 200	8. 80 000	10. 875 403

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Raíz cúbica

La raíz cúbica es un número que multiplicado por sí mismo 3 veces es igual al radicando. La raíz cúbica de una cantidad puede obtenerse por aproximación de un número, cuyo resultado se aproxime a la cantidad, siempre y cuando éste sea menor que 100.

Ejemplo

Determina la raíz cúbica de 732.

Solución

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{732} & 9 \\ \hline -729 & \\ 3 & \end{array}$$

El número cuyo cubo se aproxima a 732 es 9

Por consiguiente, la raíz cúbica de 732 es 9 con un residuo de 3 unidades.

Para obtener raíces cúbicas de cantidades mayores de 3 cifras, se realiza el siguiente procedimiento:

EJEMPLOS

1 Calcula $\sqrt[3]{1728}$.

Solución

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{1,728} & 1 \\ \hline -1 & \\ 0 & \end{array}$$

Se separa 1 728 en periodos de 3 dígitos, a partir del punto decimal de derecha a izquierda, y se busca un número cuyo cubo se aproxime o dé como resultado 1.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{1,728} & 12 \\ -1 & 3 \times 1^2 = 3 \\ 0\ 728 & 7 \div 3 = 2 \\ -0\ 728 & \\ 0 & \end{array}$$

Se baja el siguiente periodo 728, la raíz parcial 1 se eleva al cuadrado y se multiplica por 3 ($3 \times 1^2 = 3$), se separan los 2 dígitos de la derecha de 728 y se divide entre 3 ($7 \div 3 = 2$), 2 se coloca a la derecha del 1 y se realiza la siguiente prueba:

$$\begin{array}{r} 3 \times 1^2 \times 2 \times 100 = 600 \\ +\ 3 \times 1 \times 2^2 \times 10 = 120 \\ 2^3 = 8 \\ \hline 728 \end{array}$$

El resultado 728 es menor o igual que 728, se efectúa la resta

El resultado de la raíz cúbica del número dado es 12.

Si al efectuar el cociente resulta un número de 2 dígitos, entonces para hacer la prueba se debe tomar a 9 o un número menor que 9.

EJEMPLOS

1 Determina la raíz cúbica de 9 663 597.

Solución

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{9,663,597} & 2 \\ \hline -8 & \\ 1 & \end{array}$$

Se separa el radicando en periodos de 3 dígitos, a partir del punto decimal de derecha a izquierda, y se busca un número cuyo cubo se aproxime o dé como resultado 9, en este caso es 2, ya que $2^3 = 8$ y se resta a 9.

(*continúa*)

(*continuación*)

$\sqrt[3]{9{,}663{,}597}$	21
-8	$3\times 2^2 = 12$
1 663	$16 \div 12 = 1$
$-1\,261$	
402	

Se baja el siguiente grupo de dígitos y el resultado 2 se eleva al cuadrado y se multiplica por tres ($3 \times 2^2 = 12$), se separan los 2 dígitos de la derecha de 1 663 y se divide entre 12 ($16 \div 12 = 1$), el 1 se coloca a la derecha del 2 para después realizar las siguientes pruebas:

$$\begin{array}{rr} 3\times 2^2\times 1\times 100 = & 1\,200 \\ +\,3\times 2\times 1^2\times 10 = & 60 \\ 1^3 = & 1 \\ \hline & 1\,261 \end{array}$$

El resultado 1 261 se sustrae de 1 663

$\sqrt[3]{9{,}663{,}597}$	213
-8	$3\times 2^2 = 12$
1 663	$16 \div 12 = 1$
$-1\,261$	$3\times 21^2 = 1\,323$
402 597	$4\,025 \div 1\,322 = 3$
$-402\,597$	
0	

Se baja el siguiente periodo 597, el nuevo resultado 21 se eleva al cuadrado y se multiplica por 3 ($3 \times 21^2 = 1\,323$), se separan los 2 dígitos de la derecha de 402 597 y 4 025 se divide entre 1 323 ($4\,025 \div 1\,323 = 3$), 3 se coloca a la derecha de 21 y se realizan las pruebas anteriores:

$$\begin{array}{rr} 3\times 21^2\times 3\times 100 = & 396\,900 \\ +\,3\times 21\times 3^2\times 10 = & 5\,670 \\ 3^3 = & 27 \\ \hline & 402\,597 \end{array}$$

Como $402\,597 \leq 402\,597$, entonces se puede efectuar la resta.

En este caso el residuo es 0; por lo tanto, el resultado de la raíz cúbica es 213

EJERCICIO **66**

Obtén la raíz cúbica de los siguientes números:

1. 512
2. 729
3. 3 375
4. 4 913
5. 10 648
6. 54 872
7. 300 763
8. 857 375
9. 2 460 375
10. 35 287 552
11. 78 953 589
12. 220 348 864

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Jerarquía de operaciones

Indica el orden en el que se deben realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíz, así como signos de agrupación. De esta forma se garantiza que se obtendrá el resultado correcto.

Orden de las operaciones. Dada una expresión que involucre diferentes operaciones, se realizan en el siguiente orden:

- Potencias y raíces. Si se tiene la potencia o la raíz de una suma o resta, estas operaciones se resuelven primero.
- Multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
- Sumas y restas de izquierda a derecha.

EJEMPLOS

1 Efectúa la operación $6^2 \div 9 \times 4 + \sqrt{16} \times 3 - 10 \div 5$.

Solución

Se desarrolla la potencia y se extrae a la raíz:

$$6^2 \div 9 \times 4 + \sqrt{16} \times 3 - 10 \div 5 = 36 \div 9 \times 4 + 4 \times 3 - 10 \div 5$$

Se realizan las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha, finalmente se efectúan las sumas y restas de izquierda a derecha y se obtiene el resultado.

$$= 4 \times 4 + 12 - 2$$
$$= 16 + 12 - 2 = 26$$

2 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{5^2 - 3^2} \times 2^2 + \sqrt[3]{8} \times \sqrt{81} \div 18 + \sqrt{18 \times 8}$?

Solución

Se desarrollan las potencias, se realizan las operaciones dentro de los radicales y se extraen las raíces:

$$\sqrt{5^2 - 3^2} \times 2^2 + \sqrt[3]{8} \times \sqrt{81} \div 18 + \sqrt{18 \times 8} = \sqrt{25-9} \times 4 + 2 \times 9 \div 18 + \sqrt{144}$$
$$= \sqrt{16} \times 4 + 2 \times 9 \div 18 + \sqrt{144}$$
$$= 4 \times 4 + 2 \times 9 \div 18 + 12$$

Se efectúan las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha. Finalmente, se suman las cantidades y se obtiene el resultado.

$$= 16 + 18 \div 18 + 12$$
$$= 16 + 1 + 12$$
$$= 29$$

3 Realiza $-\sqrt{9} - \left\{ 4^2 + 3 \left[\sqrt[3]{27} + 4 \times 6 \right] - 2^3 \right\}$.

Solución

Se desarrollan las potencias y se extraen las raíces:

$$-\sqrt{9} - \left\{ 4^2 + 3 \left[\sqrt[3]{27} + 4 \times 6 \right] - 2^3 \right\} = -3 - \{16 + 3\ [3 + 4 \times 6] - 8\}$$

Se realiza la multiplicación:

$$= -3 - \{16 + 3\ [3 + 24] - 8\}$$

Se efectúan los pasos correspondientes para eliminar los signos de agrupación y obtener el resultado:

$$= -3 - \{16 + 3\ [27] - 8\}$$
$$= -3 - \{16 + 81 - 8\} = -3 - \{89\}$$
$$= -3 - 89 = -92$$

El resultado de la operación es –92

4 ¿Cuál es el resultado de $(5-3)^4 \div 4 + \left\{ \sqrt{6^2 - 20} + \sqrt{5 \times 4 + 16} + (8-4)^2 \times 3 \right\}$?

Solución

Se realizan las operaciones que encierran los paréntesis:

$$= (5-3)^4 \div 4 + \left\{ \sqrt{6^2 - 20} + \sqrt{5 \times 4 + 16} + (8-4)^2 \times 3 \right\}$$
$$= (2)^4 \div 4 + \left\{ \sqrt{36 - 20} + \sqrt{5 \times 4 + 16} + (4)^2 \times 3 \right.$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se desarrollan las potencias:

$$=16\div 4+\left\{\sqrt{16}+\sqrt{36}+16\times 3\right\}$$

Se extraen las raíces:

$$=16\div 4+\{4+6+16\times 3\}$$

Se efectúan las multiplicaciones y divisiones:

$$=4+\{4+6+48\}$$

Finalmente, se realiza la simplificación del signo de agrupación:

$$=4+\{58\}=4+58=62$$

Por tanto, el resultado es 62

5 Realiza $\sqrt{\frac{2}{3}\div\left(\frac{17}{27}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\div\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{24}\right)}-\frac{3}{5}\times\left(\frac{7}{8}+\frac{13}{8}\right)$.

Solución

Se realizan las operaciones encerradas en los paréntesis:

$$\frac{17}{27}-\frac{1}{3}=\frac{17-9}{27}=\frac{8}{27}$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{24}=\frac{4-1}{24}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{7}{8}+\frac{13}{8}=\frac{7+13}{8}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$$

Los valores obtenidos se sustituyen y se realizan las multiplicaciones y divisiones:

$$=\sqrt{\frac{2}{3}\div\left(\frac{8}{27}\right)+\frac{1}{2}\div\left(\frac{1}{8}\right)}-\frac{3}{5}\times\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{54}{24}+\frac{8}{2}}-\frac{15}{10}$$

Pero $\frac{54}{24}=\frac{9}{4}$, $\frac{8}{2}=4$ y $\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$, entonces:

$$=\sqrt{\frac{9}{4}+4}-\frac{3}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{9+16}{4}}-\frac{3}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{25}{4}}-\frac{3}{2}$$

Se obtiene la raíz cuadrada y se realiza la resta:

$$=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}$$

$$=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Por tanto, el resultado es 1

EJERCICIO 67

Efectúa las siguientes operaciones:

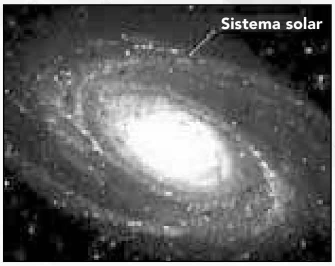
1. $7\times 2+8\div 4-3\times 2=$
2. $12\div 4\times 3+18\div 9\times 3-4\times 3=$
3. $(10-2)\div 2\times 3+(8+6)(7-2)-12\times 2\div 8=$
4. $(6+2)\times(7-4)\div(14-2)+(12-8)\times(7+3)\div(10-2)=$
5. $12^2\div\sqrt{16}\div\sqrt{81}+5^2\times 6\div 3=$
6. $\sqrt{13^2-12^2}+(6-4)^2\times 8-\sqrt{(10-8)^2}=$
7. $2+\{8\times(8-6)+[(3+4)\div 7-5\times 6\div 10]-5\}=$
8. $\sqrt{2\times 36+576\div 8}+\left\{\left(\sqrt{9}-\sqrt{4}\right)^2-[7+(8-2)-(5-4)]+6\right\}=$
9. $3\times\left\{\sqrt{(5-2)\times(7-4)}-(5-3)+(8-3)-[6-(7-2)+8]-6\right\}=$
10. $-6+(8-3)-[4+(6-3)\times 5-8]+3-\{9-(6-4)\}=$
11. $\frac{5}{4}\times\frac{2}{3}\div\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\div\frac{1}{10}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\div\frac{1}{6}=$
12. $\sqrt{\frac{9}{4}}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{1}{8}}-\left[\frac{5^2-4^2}{9}-\frac{3}{4}\right]=$
13. $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}\times\frac{3}{2}\div\frac{2}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{4}{3}\div\frac{3}{4}=$
14. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-12\left\{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\div 6+\frac{3}{8}\left(\frac{5}{2}-\frac{2}{3}\right)-\frac{25}{36}\right\}=$
15. $\left(\sqrt{\frac{25}{36}}-\sqrt{\frac{1}{36}}\right)^2\div\frac{1}{3}-2\left[\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right]^2=$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 7

NOTACIÓN CIENTÍFICA Y LOGARITMOS

Reseña HISTÓRICA



La notación científica

Se emplea para simplificar cálculos y tiene dos propósitos: uno es la representación concisa de números muy grandes o muy pequeños y, el otro, la indicación del grado de exactitud de un número que representa una medición.

Para los dos propósitos se usan potencias de 10, por ejemplo: podemos decir que la velocidad de la luz es de trescientos millones de metros por segundo, o también de 300 000 000 m/seg. Si hablamos de grandes cantidades de bytes, se puede decir que la capacidad de almacenamiento de datos de una gran computadora es de 500 Terabytes, lo que equivale a 500 000 000 000 000 bytes. Si nos referimos a la longitud de onda de los rayos cósmicos, se podría decir que es inferior a 0,000000000000001 metros.

En textos de ciencia y técnica estas cifras se escriben de la forma siguiente: "La velocidad de la luz es de 3×10^8 m/seg...". "La capacidad de almacenamiento de datos de la gran computadora es de 5×10^{14} bytes..." y "la longitud de onda de los rayos cósmicos es inferior a 1×10^{-14} metros..."

Los logaritmos

En 1614 John Napier publicó el *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*... donde, mediante una aproximación cinemática, pone en relación una progresión geométrica con una progresión aritmética. La primera es de las distancias recorridas con velocidades proporcionales a ellas mismas, la segunda, la de las distancias recorridas con velocidad constante; éstas son entonces los "logaritmos" de las primeras (el neologismo es de NAPIER).

En 1619 apareció una segunda obra, *Mirifici logarithmorum canonis constructio*.... donde el autor explica cómo calcular los logaritmos.

Henry Briggs (matemático de Londres), había descubierto la importancia de estos trabajos y retomó la idea fundamental, pero consideró una progresión geométrica simple, la de las potencias de 10, en 1617 publica una primera tabla con 8 decimales. El logaritmo de un número *x* es, por lo tanto, definido como el exponente *n* de 10, tal que *x* sea igual a 10 elevado a *n*.

La Vía Láctea tiene forma de lente convexa. El núcleo tiene una zona central de forma elíptica y unos 8×10^3 años luz de diámetro.

Notación científica

La notación científica se utiliza para expresar cantidades en función de potencias de 10 y por lo regular se usa para cantidades muy grandes o muy pequeñas.

Potencias de 10

$0.1 = 10^{-1}$	$10 = 10^{1}$
$0.01 = 10^{-2}$	$100 = 10^{2}$
$0.001 = 10^{-3}$	$1\,000 = 10^{3}$
$0.0001 = 10^{-4}$	$10\,000 = 10^{4}$
$0.00001 = 10^{-5}$	$100\,000 = 10^{5}$

Para expresar una cantidad en notación científica el punto se recorre una posición antes de la primera cifra, si la cantidad es grande, o un lugar después de la primera cifra si la cantidad es pequeña. El número de lugares que se recorre el punto decimal es el exponente de la base 10.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa en notación científica 2 345 000.

Solución

Se coloca el 2 como cifra entera, 345 como parte decimal (2.345) y se indica la multiplicación por 10 con exponente 6, ya que fue el número de cifras que se recorrió el punto a la izquierda.

$$2\,345\,000 = 2.345 \times 10^{6}$$

2 Expresa en notación científica 25 300.

Solución

El punto decimal se recorre cuatro posiciones a la izquierda, por tanto,

$$25\,300 = 2.53 \times 10^{4}$$

3 Un satélite gira en una órbita circular de 820 000 km sobre la superficie terrestre. Expresar esta cantidad en notación científica.

Solución

La órbita del satélite expresada en notación científica es:

$$820\,000 = 8.2 \times 10^{5} \text{ km}$$

Cuando los números son pequeños, el punto decimal se recorre hacia la derecha hasta dejar como parte entera la primera cifra significativa y el exponente del número 10 es de signo negativo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Escribe en notación científica 0.043.

Solución

El punto decimal se recorre 2 lugares hacia la derecha y el resultado se expresa como:

$$0.043 = 4.3 \times 10^{-2}$$

2 Representa en notación científica 0.000000386.

Solución

Se recorre el punto decimal 7 lugares de izquierda a derecha, por consiguiente,

$$0.000000386 = 3.86 \times 10^{-7}$$

3 La longitud de una bacteria es de 0.000052 m, expresa esta longitud en notación científica.

Solución

La longitud de la bacteria expresada en notación científica es:

$$0.000052 \text{ m} = 5.2 \times 10^{-5} \text{ m}$$

EJERCICIO **68**

Expresa en notación científica las siguientes cantidades:

1. 4 350	7. 5 342 000	13. 0.000000462
2. 16 000	8. 18 600 000	14. 0.00000003
3. 95 480	9. 0.176	15. 0.0000000879
4. 273 000	10. 0.0889	16. 0.0000000012
5. 670 200	11. 0.00428	17. 0.000000000569
6. 350 000 000	12. 0.000326	18. 0.0000000000781

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Escritura en forma desarrollada. El número $a \times 10^n$ se expresa en forma desarrollada de las siguientes formas:

- Si el exponente n es positivo, entonces indica el número de posiciones que se debe recorrer el punto decimal a la derecha y los lugares que no tengan cifra son ocupados por ceros.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa en su forma desarrollada 3.18×10^3.

Solución

El exponente 3 indica que el punto se deberá recorrer 3 lugares hacia la derecha, esto es:

$$3.18 \times 10^3 = 3\ 180$$

2 Escribe en su forma desarrollada 25.36×10^6.

Solución

El exponente 6 indica el número de lugares que se recorren hacia la derecha y los lugares que no tengan cifra serán ocupados por ceros.

$$25.36 \times 10^6 = 25\ 360\ 000$$

- Si el exponente n es negativo, entonces indica el número de posiciones que se debe recorrer el punto decimal a la izquierda y los lugares que no tengan cifra son ocupados por ceros.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa en notación desarrollada 7.18×10^{-4}.

Solución

En este número, el punto decimal se recorre 4 lugares hacia la izquierda.

$$7.18 \times 10^{-4} = 0.000718$$

2 Escribe en su forma desarrollada 8×10^{-2}.

Solución

Se recorren 2 lugares hacia la izquierda, por lo tanto,

$$8 \times 10^{-2} = 0.08$$

Otra forma de convertir un número en notación científica a notación desarrollada, es realizar la multiplicación por la potencia de 10 desarrollada.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Escribe en su forma desarrollada 3.012×10^{5}.

Solución

Se desarrolla la potencia de 10 y luego se realiza la multiplicación, entonces;

$$3.012 \times 10^{5} = 3.012 \times 100\,000 = 301\,200$$

2 Expresa en su forma desarrollada 8.0015×10^{-3}.

Solución

Se desarrolla la potencia de 10 y se obtiene: $10^{-3} = \frac{1}{10^{3}} = \frac{1}{1\,000}$ entonces,

$$8.0015 \times 10^{-3} = 8.0015 \times \frac{1}{1\,000} = \frac{8.0015}{1\,000} = 0.0080015$$

Por consiguiente, $8.0015 \times 10^{-3} = 0.0080015$

3 Desarrolla 2.1056×10^{-2}.

Solución

Al desarrollar la potencia de 10 se obtiene que: $10^{-2} = \frac{1}{10^{2}} = \frac{1}{100}$ entonces,

$$2.1056 \times 10^{-2} = 2.1056 \times \frac{1}{100} = \frac{2.1056}{100} = 0.021056$$

En consecuencia $2.1056 \times 10^{-2} = 0.021056$

EJERCICIO 69

Escribe en su forma desarrollada las siguientes cifras:

1. 1.6×10^{4}	5. 4.2×10^{2}	9. 1.05×10^{7}	13. 2.3×10^{-12}
2. 0.1×10^{-2}	6. 72.4×10^{-5}	10. 2.34×10^{-1}	14. 3.01×10^{-4}
3. 37.6×10^{5}	7. 1×10^{-6}	11. 3.264×10^{2}	15. 4.14501×10^{8}
4. 6×10^{-3}	8. 8.3×10^{-4}	12. 62.34×10^{-1}	16. 3.002×10^{-7}

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma y resta

Para efectuar estas operaciones es necesario que la base 10 tenga el mismo exponente.

$$a\times10^{n}+c\times10^{n}=(a+c)\times10^{n}$$

EJEMPLOS

1 Efectúa $3.5\times10^{-6}+1.83\times10^{-6}$.

Solución

Como los exponentes de la base 10 son iguales, se suman las cifras y la potencia de 10 permanece constante.

$$3.5\times10^{-6}+1.83\times10^{-6}=(3.5+1.83)\times10^{-6}=5.33\times10^{-6}$$

2 ¿Cuál es el resultado de $2.73\times10^{-4}-1.25\times10^{-4}$?

Solución

Como los exponentes de la base 10 son iguales, se realiza la operación de la siguiente manera:

$$2.73\times10^{-4}-1.25\times10^{-4}=(2.73-1.25)\times10^{-4}=1.48\times10^{-4}$$

Cuando los exponentes de la base 10 sean diferentes, se recorre el punto decimal para igualarlos y después se efectúa la operación.

EJEMPLOS

1 Efectúa $1.34\times10^{6}+2.53\times10^{5}$.

Solución

Se escoge una de las cifras para igualar los exponentes, en este caso se expresa a exponente 5.

$$1.34\times10^{6}=1\,340\,000=13.4\times10^{5}$$

Luego, la operación resulta:

$$1.34\times10^{6}+2.53\times10^{5}=13.4\times10^{5}+2.53\times10^{5}=(13.4+2.53)\times10^{5}=15.93\times10^{5}$$

Esta misma operación se realiza convirtiendo a exponente 6 y el resultado no se altera, entonces,

$$2.53\times10^{5}=253\,000=0.253\times10^{6}$$

Luego, al sustituir:

$$1.34\times10^{6}+2.53\times10^{5}=1.34\times10^{6}+0.253\times10^{6}=(1.34+0.253)\times10^{6}=1.593\times10^{6}$$

Por consiguiente, $1.34\times10^{6}+2.53\times10^{5}=1.593\times10^{6}$

2 Halla el resultado de $2.82 \times 10^{-5} - 1.1 \times 10^{-6}$.

Solución

Se convierte a exponente -6, y el resultado

$$2.82 \times 10^{-5} - 1.1 \times 10^{-6} = 28.2 \times 10^{-6} - 1.1 \times 10^{-6} = (28.2 - 1.1) \times 10^{-6} = 27.1 \times 10^{-6}$$

Ahora bien, si se convierte a exponente -5, entonces,

$$2.82 \times 10^{-5} - 1.1 \times 10^{-6} = 2.82 \times 10^{-5} - 0.11 \times 10^{-5} = (2.82 - 0.11) \times 10^{-5} = 2.71 \times 10^{-5}$$

Por consiguiente, $2.82 \times 10^{-5} - 1.1 \times 10^{-6} = 27.1 \times 10^{-6}$ o 2.71×10^{-5}

EJERCICIO **70**

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $3.18 \times 10^{6} + 1.93 \times 10^{6}$
2. $8.1 \times 10^{-4} + 2.3 \times 10^{-4}$
3. $4.3 \times 10^{-5} - 3.2 \times 10^{-5}$
4. $1.1 \times 10^{4} - 0.91 \times 10^{4}$
5. $13.1 \times 10^{6} - 0.29 \times 10^{7}$
6. $25.34 \times 10^{-3} + 1.82 \times 10^{-2}$
7. $3.83 \times 10^{4} + 5.1 \times 10^{3} - 0.2 \times 10^{5}$
8. $8.72 \times 10^{-3} - 0.3 \times 10^{-2} + 0.1 \times 10^{-4}$
9. $4 \times 10^{6} - 0.23 \times 10^{6} - 25 \times 10^{5}$
10. $1.18 \times 10^{-5} + 3.4 \times 10^{-5} - 0.12 \times 10^{-4}$
11. $2.03 \times 10^{3} + 3.02 \times 10^{2} - 0.021 \times 10^{5}$
12. $1.02 \times 10^{-2} + 0.023 \times 10^{-1} + 2.34 \times 10^{-3}$
13. $7.023 \times 10^{3} + 1.03 \times 10^{2} - 4.002 \times 10^{3} - 0.023 \times 10^{2}$
14. $8.2 \times 10^{-4} + 2.003 \times 10^{-3} - 2.89 \times 10^{-4} + 7.23 \times 10^{-3}$
15. $5.04 \times 10^{-2} + 12 \times 10^{-3} - 2.04 \times 10^{-2} + 852 \times 10^{-4}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación y división

- Para multiplicar o dividir un número en notación científica por o entre un número real cualquiera, se afecta sólo a la primera parte del número.

$$a(b \times 10^{n}) = (a \times b) \times 10^{n} \quad ; \quad \frac{b \times 10^{n}}{a} = (b \div a) \times 10^{n} \quad \text{con } a \neq 0 \text{ para la división}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $3(5.2 \times 10^{7})$?

Solución

Se efectúa el producto de 3 por 5.2, la base 10 y su exponente no se alteran.

$$3(5.2 \times 10^{7}) = 3(5.2) \times 10^{7} = 15.6 \times 10^{7} = 1.56 \times 10^{8}$$

2 Efectúa $\frac{3.5\times 10^{-6}}{5}$.

Solución

Se realiza la división de 3.5 entre 5 mientras que la base 10 y su exponente no se alteran.

$$\frac{3.5\times 10^{-6}}{5}=\frac{3.5}{5}\times 10^{-6}=0.7\times 10^{-6}=7\times 10^{-7}$$

Para multiplicar o dividir números escritos en notación científica, se efectúa la multiplicación o división en las primeras partes y para la base 10 se aplican las leyes de los exponentes.

$$(a\times 10^{m})\,(b\times 10^{n})=(a\times b)\times 10^{m+n} \qquad \frac{a\times 10^{m}}{b\times 10^{n}}=a\div b\times 10^{m-n}$$

EJEMPLOS

1 Efectúa la siguiente operación $(8.2\times 10^{-5})\,(4.1\times 10^{-3})$.

Solución

Se multiplican 8.2 por 4.1 y los exponentes de la base 10 se suman.

$$(8.2\times 10^{-5})\,(4.1\times 10^{-3})=(8.2\times 4.1)\times 10^{-5+(-3)}=33.62\times 10^{-8}=3.362\times 10^{-7}$$

2 Determina el resultado de $\frac{\left(4.25\times 10^{6}\right)\left(2.01\times 10^{-2}\right)}{2.5\times 10^{8}}$.

Solución

Se realiza la multiplicación y posteriormente la división para obtener el resultado.

$$\frac{(4.25\times 10^{6})(2.01\times 10^{-2})}{2.5\times 10^{8}}=\frac{\left(4.25\times 2.01\right)\left(10^{6}\times 10^{-2}\right)}{2.5\times 10^{8}}=\frac{8.5425\times 10^{4}}{2.5\times 10^{8}}=\frac{8.5425}{2.5}\times 10^{4-8}$$
$$=3.417\times 10^{-4}$$

Por tanto, el resultado de la operación es 3.417×10^{-4}

3 ¿Cuál es el resultado de $\frac{3.2\times 10^{-5}\left(4.1\times 10^{-7}-21\times 10^{-8}\right)}{2.3\times 10^{-13}+0.27\times 10^{-12}}$?

Solución

Se realizan las sumas y restas, posteriormente la multiplicación y la división para obtener el resultado final.

$$\frac{3.2\times 10^{-5}\left(4.1\times 10^{-7}-21\times 10^{-8}\right)}{2.3\times 10^{-13}+0.27\times 10^{-12}}=\frac{3.2\times 10^{-5}\left(4.1\times 10^{-7}-2.1\times 10^{-7}\right)}{2.3\times 10^{-13}+2.7\times 10^{-13}}=\frac{\left(3.2\times 10^{-5}\right)\left(2\times 10^{-7}\right)}{5\times 10^{-13}}$$
$$=\frac{(3.2)(2)\times 10^{-5+(-7)}}{5\times 10^{-13}}=\frac{6.4\times 10^{-12}}{5\times 10^{-13}}=\frac{6.4}{5}\times 10^{-12-(-13)}$$
$$=1.28\times 10^{1}=12.8$$

Por consiguiente, el resultado de la operación es 12.8

EJERCICIO 71

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $3\left(7.2\times10^{-6}\right)$
2. $4.2\left(3.52\times10^{8}\right)$
3. $\dfrac{1.13\times10^{5}}{2}$
4. $\dfrac{1}{4}\left(4.83\times10^{-6}\right)$
5. $\dfrac{3.27\times10^{8}}{3}$
6. $5\left(3\times10^{-4}+2.6\times10^{-5}\right)$
7. $3.8\left(6.25\times10^{13}-42\times10^{12}\right)$
8. $\left(2.73\times10^{-2}\right)\left(1.16\times10^{4}\right)$
9. $\left(4.25\times10^{-8}\right)\left(1.2\times10^{-6}\right)$
10. $\left(3.1\times10^{5}\right)\left(2.3\times10^{6}\right)$
11. $1.25\times10^{-6}\left(7\times10^{9}+1.2\times10^{10}\right)$
12. $5.4\times10^{8}\left(1.3\times10^{-11}-5\times10^{-12}\right)$
13. $\dfrac{1.16\times10^{-5}}{2\times10^{-3}}$
14. $\dfrac{4.25\times10^{-2}}{5\times10^{3}}$
15. $\dfrac{\left(1.32\times10^{-4}\right)\left(2.5\times10^{-3}\right)}{3\times10^{-12}}$
16. $\dfrac{\left(3.78\times10^{-3}\right)\left(4.26\times10^{-5}\right)}{2.7\times10^{-3}}$
17. $\dfrac{3.5\times10^{7}+2.3\times10^{7}}{5.9\times10^{5}-30\times10^{4}}$
18. $\dfrac{1.73\times10^{-2}-0.3\times10^{-3}}{2\times10^{-6}}$
19. $\dfrac{\left(1.26\times10^{-5}\right)\left(1.04\times10^{-3}\right)}{\left(2.73\times10^{-3}\right)\left(1.2\times10^{-4}\right)}$
20. $\dfrac{4.2\times10^{5}\left(1.7\times10^{-4}+0.003\times10^{-2}\right)}{8.4\times10^{-1}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Potencias y raíces

Potencia de un número en notación científica. Al elevar un número en notación científica a un exponente dado, se elevan cada una de sus partes, como se ilustra a continuación:

$$(a\times10^{m})^{n}=a^{n}\times10^{m\times n}$$

EJEMPLOS

1 Realiza $\left(1.2\times10^{-6}\right)^{2}$.

Solución

Se elevan ambas partes del número al exponente 2

$$\left(1.2\times10^{-6}\right)^{2}=\left(1.2\right)^{2}\times\left(10^{-6}\right)^{2}=1.44\times10^{-12}$$

El resultado de la operación es 1.44×10^{-12}

2 ¿Cuál es el resultado de $\left(4.4\times10^{5}\right)^{3}$?

Solución

Se elevan ambas partes del número.

$$\left(4.4\times10^{5}\right)^{3}=\left(4.4\right)^{3}\times\left(10^{5}\right)^{3}=85.184\times10^{15}=8.5184\times10^{16}$$

Por tanto, el resultado es: 8.5184×10^{16}

Raíz de un número en notación científica. Para obtener la raíz de un número en notación científica se escribe el exponente de la base 10 como múltiplo del índice del radical, luego se extrae la raíz de ambas partes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Halla el resultado de $\sqrt{1.69\times10^{-4}}$.

Solución

El exponente de la base 10 es múltiplo de 2, entonces se procede a extraer la raíz del número.

$$\sqrt{1.69\times10^{-4}}=\sqrt{1.69}\times\sqrt{10^{-4}}=1.3\times10^{-\frac{4}{2}}=1.3\times10^{-2}$$

El resultado de la raíz es: 1.3×10^{-2}

2 Efectúa $\sqrt[3]{8\times10^{14}}$.

Solución

Debido a que el exponente de la base 10 no es múltiplo de 3, se transforma el exponente de la siguiente manera:

$$8\times10^{14}=0.8\times10^{15}$$

Por tanto,

$$\sqrt[3]{8\times10^{14}}=\sqrt[3]{0.8\times10^{15}}=\sqrt[3]{0.8}\times\sqrt[3]{10^{15}}=0.92831\times10^{5}=9.2831\times10^{4}$$

Por consiguiente, el resultado es: 9.2831×10^{4}

3 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{\dfrac{3.2\times10^{-7}+0.43\times10^{-6}}{1.2\times10^{-3}}}$?

Solución

Se efectúan las operaciones dentro del radical y se extrae la raíz.

$$\sqrt{\frac{3.2\times10^{-7}+0.43\times10^{-6}}{1.2\times10^{-3}}}=\sqrt{\frac{3.2\times10^{-7}+4.3\times10^{-7}}{1.2\times10^{-3}}}=\sqrt{\frac{7.5\times10^{-7}}{1.2\times10^{-3}}}=\sqrt{6.25\times10^{-7-(-3)}}$$

$$=\sqrt{6.25\times10^{-4}}=\sqrt{6.25}\times\sqrt{10^{-4}}=2.5\times10^{-2}$$

EJERCICIO 72

Realiza las siguientes operaciones.

1. $\left(1.7\times10^{-2}\right)^{2}$
2. $\left(8\times10^{-6}\right)^{-2}$
3. $\left(2.5\times10^{-6}+1.3\times10^{-6}\right)^{2}$
4. $\left(4.3\times10^{8}-25\times10^{7}\right)^{3}$
5. $\dfrac{\left(1.3\times10^{5}-4\times10^{5}+3.5\times10^{5}\right)^{-2}}{2.0\times10^{-4}}$
6. $\left(\dfrac{2.3\times10^{-4}+5.7\times10^{-4}}{3.24\times10^{-6}-1.64\times10^{-6}}\right)^{2}$
7. $\sqrt{9.61\times10^{-8}}$
8. $\sqrt[3]{2.16\times10^{8}}$
9. $\sqrt{32.4\times10^{-9}}$
10. $\sqrt[3]{1.6\times10^{7}+1.1\times10^{7}}$
11. $\sqrt[5]{5.26\times10^{-14}-2.06\times10^{-14}}$
12. $\left(1.2\times10^{-3}\right)^{3}\cdot\sqrt[3]{1.331\times10^{-6}}$
13. $\sqrt[5]{\dfrac{4.1\times10^{7}+1.9\times10^{7}}{3.5\times10^{-9}-1.625\times10^{-9}}}$
14. $\sqrt[3]{\dfrac{9.91\times10^{3}-36.6\times10^{2}}{3.25\times10^{10}+1.75\times10^{10}}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Logaritmo de un número

El logaritmo con base b de un número N, es el exponente a, al cual se eleva la base b para obtener el resultado o argumento N.

$$\log_b N = a \Leftrightarrow N = b^a \text{ con } N > 0$$

Ejemplos

Utiliza la definición de logaritmo para transformar a su forma exponencial los siguientes logaritmos:

1. $\log_3 243 = 5 \Rightarrow 243 = 3^5$
2. $\log_{10} 10\,000 = 4 \Rightarrow 10\,000 = 10^4$
3. $\log_2 64 = 6 \Rightarrow 64 = 2^6$
4. $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4 \Rightarrow 25 = \left(\sqrt{5}\right)^4$

Logaritmos comunes o **de Briggs.** Son logaritmos cuya base es 10, el logaritmo de cualquier número está formado por una parte que corresponde a un número entero llamado *característic*a y otro decimal que recibe el nombre de *mantisa*. Estos logaritmos se representan de la siguiente manera:

$$\log_{10} N = \log N$$

Cálculo del logaritmo de un número. La característica del logaritmo de un número se obtiene de la siguiente manera:

- Si la parte entera del número es mayor que cero, la característica es el número de cifras enteras menos uno.
- Si la parte entera del número es cero, la característica es negativa y resulta de contar el número de lugares que existe del punto decimal hasta el lugar que ocupa la primera cifra significativa.
- Para obtener la mantisa se buscan las 2 primeras cifras del número en la primera columna de las tablas, se sigue sobre el mismo renglón hasta llegar al cruce con la columna encabezada por la tercera cifra; si es necesario se sumará la parte proporcional que corresponde a la cuarta cifra, que se encuentra sobre el mismo renglón en el cruce con la columna correspondiente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el log 7.

Solución

La característica = número de cifras enteras − 1 = 1 − 1 = 0

Se toma 70 en vez de 7 y para calcular la mantisa se ubica 70 en la primera columna y se toma la cifra que se encuentra sobre el renglón y la intersección con la columna 0

N	**0**	1	2	3..	9	1	2	3
≈	≈	≈	≈	≈	≈	≈	≈	≈
70	**8451**	8457	8463	8470...	8506	1	1	2

Por tanto, log 7 = 0.8451

2 Obtén el log 689.

Solución

La característica = número de cifras enteras – 1 = 3 – 1 = 2

Para calcular la mantisa se ubica 68 en la primera columna y se toma la cifra que se encuentra sobre el renglón y la intersección con la columna 9

N	0	1	2	3..	**9**	1	2	3
≈	≈	≈	≈	≈	≈	≈	≈	≈
68	8325	8331	8338	8344...	**8382**	1	1	2

Por tanto, log 689 = 2.8382

3 Encuentra el valor de: log 25.43.

Solución

Característica = 2 – 1 = 1

Cálculo de la mantisa:

N	0	1	2	3	**4**	9	1	2	**3**
≈	≈	≈	≈	≈	≈	≈	≈	≈	≈
25	3979	3997	4014	4031	**4048**	4133	2	3	**5**

El resultado final de la mantisa se obtiene de la suma de 4048 y 5

Finalmente, log 25.43 = 1.4053

4 Calcula el valor de: log 0.00457.

La parte entera es cero, por tanto la característica es negativa y corresponde a la posición que ocupa el número 4, que es la primera cifra significativa después del punto decimal.

Característica = –3 y se denota como $\bar{3}$

La mantisa se obtiene de la misma manera que en los ejemplos anteriores:

N	0	1	2	3	4................	**7**....................	9	1	2	3
≈	≈	≈	≈	≈	≈	≈	≈	≈	≈	≈
45	6532	6542	6551	6561	6571............	**6599**............	6618	1	1	2

Por tanto, log 0.00457 = $\bar{3}$.6599

EJERCICIO 73

Emplea tablas y obtén el logaritmo de Briggs de las siguientes cantidades:

1. log 1 349
2. log 134.9
3. log 13.49
4. log 0.001349
5. log 32.1
6. log 7.28
7. log 0.689
8. log 0.049
9. log 0.0078
10. log 5 685
11. log 3 233
12. log 53 000
13. log 1.364
14. log 5.032
15. log 0.41
16. log 30
17. log 7.032
18. log 1 000

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Antilogaritmo

Dado el $\log_b N = a$, el antilogaritmo con base b de a es N.

Cálculo del antilogaritmo de un número. La característica positiva más uno indica el número de cifras enteras que tiene el número N.

La característica negativa indica el lugar que ocupa la primera cifra significativa a la derecha del punto decimal.

Para obtener el antilogaritmo se buscan las 2 primeras cifras del número en la primera columna de la tabla de antilogaritmos, se sigue sobre el mismo renglón hasta llegar al cruce con la columna encabezada por la tercera cifra; si es necesario se suma la parte proporcional que corresponde a la cuarta cifra, que se encuentra sobre el mismo renglón en el cruce con la columna correspondiente.

EJEMPLOS

1 Determina el antilogaritmo de: 2.5469.

Solución

Característica = 2, entonces el número tiene 2 + 1 = 3 cifras enteras.

Mantisa:

N	0	1	2	3	4.................**6**.................... 9	1............**9**
≈	≈	≈	≈	≈	≈ ≈ ≈	≈ ≈ ≈
.54	3467	3475	3483	3491	3499............**3516**............3540	1............**7**

El resultado de la mantisa se obtiene de sumar el 3516 y la parte proporcional que es 7 obteniendo 3523. Por tanto, el resultado es:

$$\text{antilog } 2.5469 = 352.3$$

2 Obtén el antilogaritmo de: 3.4237.

Solución

Característica = 3 + 1 = 4

Mantisa:

N	0	1	2	**3**	4 9	1 .....**7**.....9
≈	≈	≈	≈	≈	≈ ≈	≈ ≈ ≈
.42	2630	2636	2642	**2649**	2655 2685	1 .....**4**.....6

Mantisa = 2649 + 4 = 2653
Finalmente, antilog 3.4237 = 2653

3 Obtén el antilogaritmo de: $\bar{2}.0401$.

Como la característica del logaritmo de referencia es $\bar{2}$ la primera cifra significativa debe ocupar el segundo lugar a la derecha del punto decimal; en consecuencia, se debe poner un cero entre dicha cifra y el punto decimal.

Característica = – 2 + 1 = – 1

Mantisa:

N	**0**	1	2	3	4 9	**1**............9
≈	≈	≈	≈	≈	≈ ≈	≈ ≈ ≈
.04	**1096**	1099	1102	1104	1107..............................1119	**0**............2

Por tanto:

$$\text{antilog } \bar{2}.0401 = 0.01096$$

EJERCICIO 74

Mediante las tablas de antilogaritmos calcula el valor de *N*:

1. $\log N = 1.8674$
2. $\log N = 3.8046$
3. $\log N = 1.4950$
4. $\log N = 2.4683$
5. $\log N = 0.5611$
6. $\log N = 0.7322$
7. $\log N = 0.0065$
8. $\log N = 2.6545$
9. $\log N = 0.4718$
10. $\log N = 3.0017$
11. $\log N = 3.5766$
12. $\log N = \bar{2}.2618$
13. $\log N = \bar{1}.4022$
14. $\log N = \bar{4}.7163$
15. $\log N = \bar{1}.6310$
16. $\log N = \bar{2}.7047$
17. $\log N = \bar{3}.7514$
18. $\log N = \bar{2}.034$
19. $\log N = \bar{1}.7949$
20. $\log N = \bar{4}.10$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Propiedades de los logaritmos

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b M^n = n \log_b M \qquad M > 0$
4. $\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_b M \qquad M > 0$
5. $\log_b MN = \log_b M + \log_b N \qquad M > 0 \text{ y } N > 0$
6. $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N \qquad M > 0 \text{ y } N > 0$
7. $\log_e M = \ln(M)$, ln = logaritmo natural, $e = 2.718\ldots$

Nota: $\log_b (M + N) \neq \log_b M + \log_b N \qquad \log_b\left(\frac{M}{N}\right) \neq \frac{\log_b M}{\log_b N}$

Las propiedades de los logaritmos se utlizan para resolver operaciones aritméticas, como se muestra en los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el valor aproximado de: $N = (5.130)\ (3.134)$.

Solución

Se aplican logaritmos a ambos miembros de la igualdad,

$$\log N = \log\ (5.130)(3.134)$$

Se aplican las propiedades de los logaritmos:

$$\log N = \log\ (5.130) + \log\ (3.134) = 0.7101 + 0.4961 \qquad \text{(propiedad 5)}$$
$$\log N = 1.2062$$

Se despeja "N",

$$N = \text{antilog } 1.2062$$

Entonces, $N = 16.08$

2 Calcula el valor aproximado de: $N = \sqrt[3]{71.47}$.

Solución

$$\log N = \log \sqrt[3]{71.47}$$
$$\log N = \frac{1}{3}\log\ (71.47) = \frac{1}{3}(1.8541) = 0.6180 \qquad \text{(propiedad 4)}$$
$$N = \text{antilog } 0.6180$$

Por tanto, $N = 4.150$

3 Halla el valor aproximado de: $M = \dfrac{7.65}{39.14}$.

Solución

$$\log M = \log \frac{7.65}{39.14}$$
$$\log M = \log\ (7.65) - \log\ (39.14) = 0.8837 - 1.5926 \qquad \text{(propiedad 6)}$$
$$\log M = -0.7089 = -1 + (1 - 0.7089) = -1 + 0.2911 = \bar{1}.2911$$
$$M = \text{antilog } \bar{1}.2911$$

Entonces, $M = 0.1954$

4 Halla el valor aproximado de: $R = (18.65)^4$.

Solución

$$\log R = 4\log\ (18.65) \qquad \text{(propiedad 3)}$$
$$\log R = 4(1.2707) = 5.0828$$
$$R = \text{antilog } 5.0828$$

Finalmente, $R = 121\ 000$

Otras aplicaciones de las propiedades de los logaritmos se ilustran en los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

5 Si $\log 5 = 0.6989$ y $\log 7 = 0.8450$, encontrar el valor de $\log 35$.

Solución

Se expresa 35 como: $35 = (5)(7)$

Se aplica la propiedad de los logaritmos y se obtiene el resultado:

$$\begin{aligned}\log 35 &= \log (5)(7)\\ &= \log 5 + \log 7\\ &= 0.6989 + 0.8450 = 1.5439\end{aligned}$$

Por consiguiente, el resultado es 1.5439

6 ¿Cuál es el resultado de $\log 12$, si $\log 2 = 0.3010$ y $\log 3 = 0.4771$?

Solución

Se expresa 12 como:

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

Al aplicar las propiedades de los logaritmos y efectuar las operaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}\log 12 &= \log 2^2 \cdot 3\\ &= \log 2^2 + \log 3\\ &= 2\log 2 + \log 3\\ &= 2(0.3010) + 0.4771\\ &= 0.6020 + 0.4771\\ &= 1.0791\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\log 12 = 1.0791$

7 Halla el resultado de $\log \sqrt{2.5}$ si $\log 2 = 0.3010$ y $\log 5 = 0.6989$.

Solución

Se expresa el logaritmo del número de la siguiente manera:

$$\log \sqrt{2.5} = \log \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Se aplican las propiedades correspondientes y se obtiene el resultado.

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}(\log 5 - \log 2)\\ &= \frac{1}{2}(0.6989 - 0.3010)\\ &= \frac{1}{2}(0.3979)\\ &= 0.19895\end{aligned}$$

El resultado del logaritmo es 0.19895

EJERCICIO 75

Utiliza las propiedades y las tablas de los logaritmos que se encuentran al final del libro, para obtener el valor aproximado de las siguientes operaciones:

1. $\sqrt{9\,985}$
2. $\sqrt[3]{874.2}$
3. $\sqrt[4]{2\,893\,000}$
4. $\sqrt{42.87}$
5. $\sqrt[3]{51\,190}$
6. $\sqrt[4]{0.06349}$
7. $\sqrt[3]{0.06349}$
8. $\sqrt{6.248}$
9. $\sqrt[3]{0.4285}$
10. $(9.45)(0.536)(0.714)$
11. $(-88.5)(0.1123)(10.5)$
12. $\dfrac{-382.1}{543}$
13. $\dfrac{(286.5)(4.714)}{-67.84}$
14. $\dfrac{143}{(-5.13)(7.62)}$
15. $\sqrt[4]{596}$
16. $(3.271)^5$
17. $\left(\dfrac{53.21}{8.164}\right)^3$
18. $\sqrt[3]{375\times 83.9}$
19. $\sqrt[4]{4\,096}$
20. $\sqrt[3]{\dfrac{9\,604}{3.5}}$
21. $\sqrt{\dfrac{(675)(3.151)}{(65.34)}}$
22. $\sqrt[3]{\dfrac{(34)^2\times 52.1}{543}}$
23. $\left[\dfrac{(6.53)(81.51)}{\sqrt[3]{8\,015}}\right]^2$

Si log 2 = 0.3010, log 3 = 0.4771, log 5 = 0.6989 y log 7 = 0.8450, calcula los siguientes logaritmos:

24. log 14
25. log 15
26. log 30
27. log 42
28. log 105
29. log 20
30. log 36
31. log 150
32. log 294
33. log 343
34. log 7.5
35. log 4.2
36. $\log \sqrt[6]{28}$
37. $\log \sqrt[3]{350}$
38. $\log \sqrt[5]{11.2}$
39. $\log \sqrt{52.5}$
40. $\log \sqrt[3]{\dfrac{14}{15}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Cambios de base

Si se conoce el logaritmo base b de un número, se puede hallar el logaritmo en otra base a con la fórmula:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Demostración:

Sea $\log_b N = x$, entonces mediante la definición, se obtiene:

$$N = b^x$$

Al aplicar logaritmo base a, en ambos miembros de la igualdad:

$$\log_a N = \log_a b^x$$

por la propiedad 3,

$$\log_a N = x \log_a b$$

al dividir ambos miembros por $\log_a b$,

$$x = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Se obtiene:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa utilizando logaritmos en base 4, $\log_2 32$.

Solución

Del logaritmo se tiene que:

$$N = 32,\ b = 2,\ a = 4$$

Al sustituir en la fórmula se obtiene:

$$\log_2 32 = \frac{\log_4 32}{\log_4 2}$$

2 Halla el valor de $\log_7 343$, transformando a base 10.

Solución

De la expresión $\log_7 343$ se tiene que:

$$b = 7,\ N = 343 \text{ y } a = 10$$

Al sustituir en la fórmula,

$$\log_7 343 = \frac{\log 343}{\log 7} = \frac{2.5353}{0.8451} = 3$$

Finalmente, $\log_7 343 = 3$

3 Encuentra el $\log_8 326$.

Solución

Se realiza el cambio a base 10,

$$\log_8 326 = \frac{\log 326}{\log 8} = \frac{2.5132}{0.9031} = 2.7828$$

Finalmente, $\log_8 326 = 2.7828$

4 Encuentra el valor de: $\log_2 354.1$.

Solución

Se aplica un cambio a base 10,

$$\log_2 354.1 = \frac{\log 354.1}{\log 2} = \frac{2.5491}{0.3010} = 8.4687$$

Por tanto, $\log_2 354.1 = 8.4687$

5 Encuentra el valor de: $\log_3 2\,526$.

Solución

Se aplica un cambio a base 10,

$$\log_3 2\,526 = \frac{\log 2\,526}{\log 3} = \frac{3.4024}{0.4771} = 7.1314$$

Por consiguiente, $\log_3 2\,526 = 7.1314$

EJERCICIO 76

Encuentra el valor de los siguientes logaritmos:

1. $\log_6 31$
2. $\log_9 10.81$
3. $\log_5 3.625$
4. $\log_{12} 643.3$
5. $\log_8 1.86$
6. $\log_{20} 124$
7. $\log_{13} 7.32$
8. $\log_{15} 21.7$
9. $\log_3 8.642$
10. $\log_2 8\,435$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 8

RAZONES Y PROPORCIONES

Reseña HISTÓRICA

La Teoría de proporciones (Libros V a VI)

En la obra de Euclides *Los elementos*, los Libros V y VI tratan de la proporcionalidad y la semejanza de acuerdo con los fundamentos propuestos por Eudoxo.

El Libro V, da 18 definiciones y 25 proposiciones, expone la teoría general de la proporcionalidad, independiente de la naturaleza de las cantidades proporcionales. Le ocurre otro tanto que al Libro II con relación a su sustitución actual por las reglas correspondientes del álgebra simbólica.

Una vez desarrollada la teoría de proporciones en el Libro V, Euclides la aplica en el Libro VI, da 5 definiciones y 33 proposiciones, para demostrar teoremas relativos a razones y proporciones que se presentan al estudiar triángulos, paralelogramos y otros polígonos semejantes.

Eudoxo de Cnidos
(en torno a 400-347 a.n.e.)

Cantidades proporcionales

Si se tienen 2 cantidades tales que al multiplicar una de ellas por un número la otra queda multiplicada por el mismo número, o al dividir una de ellas la otra queda dividida por el mismo número, se dice que las cantidades son directamente proporcionales.

Ejemplos

Si 18 lápices cuestan \$28, entonces 54 lápices costarán el triple, es decir, \$84; al multiplicar el número de lápices por 3 el costo también quedó multiplicado por 3. Por lo tanto, las cantidades son directamente proporcionales.

Un automóvil recorre 360 km en 4 horas a velocidad constante; entonces, en 2 horas recorrerá la mitad, esto es 180 km, ambas cantidades quedaron divididas por 2, entonces se dice que son directamente proporcionales.

Si se tienen 2 cantidades tales que al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número y viceversa, entonces, las cantidades se dice que son inversamente proporcionales.

Ejemplo

Si 18 hombres construyen una barda en 12 días, entonces 6 hombres construirán la misma barda en el triple de tiempo, es decir, 36 días. Al dividir el número de hombres por 3, el número de días quedó multiplicado por 3, por consiguiente las cantidades son inversamente proporcionales.

Razón. Es el cociente entre 2 cantidades, donde el numerador recibe el nombre de antecedente y el denominador de consecuente.

Para las cantidades a, b en la razón $\frac{a}{b}$ o $a:b$ con $b \neq 0$, a recibe el nombre de antecedente y b el de consecuente.

Ejemplos

En la razón $\frac{7}{4}$, 7 es el antecedente y 4 es el consecuente.

En la razón 2 : 3 (se lee 2 es a 3), 2 es el antecedente y 3 es el consecuente.

Razón de proporcionalidad. Si a y b son 2 cantidades directamente proporcionales, la razón $\frac{a}{b}$ recibe el nombre de razón de proporcionalidad, la cual siempre es constante.

Ejemplo

Si 18 libros de ciencia cuestan \$1260, la razón de proporcionalidad es de 70, ya que $\frac{1260}{18} = 70$.

Proporción

Es la igualdad entre 2 razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ o bien } a:b::c:d \text{ con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

La expresión se lee a es a b como c es a d, a y d son los extremos, b y c son los medios.

Ejemplo

3 es a 6 como 8 es a 16, se escribe $\frac{3}{6} = \frac{8}{16}$.

Al simplificar cada fracción se obtiene $\frac{1}{2}$, la razón de proporcionalidad

En una proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ entonces } a \cdot d = b \cdot c \text{ con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

Ejemplo

Para la proporción $\frac{5}{4}=\frac{20}{16}$ se tiene que $(5)(16)=(4)(20)=80$.

En una proporción un extremo es igual al producto de los medios dividido por el extremo restante, es decir:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ entonces } a=\frac{b\cdot c}{d} \text{ o } d=\frac{b\cdot c}{a}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En la proporción $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$ se tiene que $2=\frac{(3)(10)}{15}$ y $15=\frac{(3)(10)}{2}$.

2 Halla el valor de m en la siguiente proporción $\frac{m}{5}=\frac{24}{30}$.

Solución

m es un extremo en la proporción, entonces:

$$m=\frac{(5)(24)}{30}=\frac{120}{30}=4$$

Por tanto, $m=4$

3 ¿Cuál es el valor de b en la siguiente proporción $\frac{7}{2}=\frac{10}{b}$?

Solución

b es uno de los extremos en la proporción, por lo tanto:

$$b=\frac{(2)(10)}{7}=\frac{20}{7}$$

Por consiguiente, $b=\frac{20}{7}$

En una proporción un medio es igual al producto de los extremos dividido por el medio restante, es decir:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ entonces } b=\frac{a\cdot d}{c} \text{ o } c=\frac{a\cdot d}{b}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En la proporción $\frac{2}{7}=\frac{6}{21}$, se tiene que:

$$7=\frac{(2)(21)}{6} \text{ y } 6=\frac{(2)(21)}{7}$$

2 ¿Cuál es el valor de c en la proporción $\frac{5}{4}=\frac{c}{28}$?

Solución

c es un medio de la proporción, entonces:

$$c=\frac{(5)(28)}{4}=\frac{140}{4}=35$$

Por tanto, $c=35$

EJERCICIO 77

Determina el valor del elemento que falta en cada una de las siguientes proporciones:

1. $\frac{3}{4}=\frac{x}{8}$
2. $\frac{2}{n}=\frac{8}{32}$
3. $\frac{4}{5}=\frac{12}{m}$
4. $\frac{a}{5}=\frac{6}{15}$
5. $\frac{20}{x}=\frac{6}{15}$
6. $\frac{7}{14}=\frac{y}{10}$
7. $\frac{x}{4}=\frac{6}{2}$
8. $\frac{2}{3}=\frac{12}{n}$
9. $\frac{7}{8}=\frac{56}{p}$
10. $\frac{x}{8}=\frac{9}{12}$
11. $\frac{3}{7}=\frac{z}{28}$
12. $\frac{y}{5}=\frac{8}{20}$
13. $\frac{3}{9}=\frac{x}{27}$
14. $\frac{x}{100}=\frac{150}{75}$
15. $\frac{15}{70}=\frac{30}{x}$
16. $\frac{5}{m}=\frac{15}{9}$
17. $\frac{3}{5}=\frac{12}{m}$
18. $\frac{90}{x}=\frac{15}{85}$
19. $\frac{8}{a}=\frac{16}{12}$
20. $\frac{4}{12}=\frac{x}{3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Media proporcional (media geométrica)

A una proporción de la forma:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \quad b\neq 0\ ,\ c\neq 0$$

Se le llama proporción geométrica y se dice que b es media proporcional (geométrica) entre a y c. La media proporcional es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En la proporción $\frac{4}{8}=\frac{8}{16}$, se tiene que:

$$\sqrt{(4)(16)}=\sqrt{64}=8$$

2 Calcula el valor de m en la proporción $\frac{9}{m}=\frac{m}{4}$.

Solución

m es la media proporcional de 9 y 4, entonces:

$$m=\sqrt{(9)(4)}=\sqrt{36}=6$$

Por tanto, $m=6$

3 ¿Cuál es la media proporcional entre 4 y 6?

Solución

La proporción es $\frac{4}{b}=\frac{b}{6}$ donde b es la media proporcional, por lo tanto:

$$b=\sqrt{(4)(6)}=\sqrt{24}=\sqrt{2^2\cdot 2\cdot 3}=2\sqrt{2\cdot 3}=2\sqrt{6}$$

Por consiguiente, la media proporcional entre 4 y 6 es $2\sqrt{6}$

4 Encuentra la media geométrica entre 0.375 y 0.5.

Solución

Se convierten las fracciones decimales a fracción común.

$$0.375=\frac{3}{8},\ 0.5=\frac{1}{2}$$

Se halla la media proporcional c en:

$$\frac{\frac{3}{8}}{c}=\frac{c}{\frac{1}{2}} \text{ de donde } c=\sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{\frac{3}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

Por tanto, la media proporcional entre 0.375 y 0.5 es $\frac{1}{4}\sqrt{3}$

EJERCICIO 78

Encuentra la media proporcional (geométrica) entre los números dados:

1. 12 y 3
2. 6 y 24
3. 9 y 25
4. 4 y 12
5. 2 y 7
6. 9 y 18
7. 10 y 25
8. 0.1 y 0.5
9. 0.2 y 0.8
10. 0.8 y 1.6

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Cuarta proporcional

Se le llama cuarta proporcional a cualquiera de los 4 términos en una proporción.

EJEMPLOS

1 ¿Una cuarta proporcional de 6, 4 y 3?

Solución

Se forma la proporción $\frac{6}{4}=\frac{3}{x}$ tomando a x como el último extremo.

El extremo es igual al producto de los medios dividido por el extremo restante.

$$x=\frac{(4)(3)}{6}=\frac{12}{6}=2$$

Por tanto, una cuarta proporcional de 6, 4 y 3 es 2

2 ¿Una cuarta proporcional de $\frac{5}{4},\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{10}$?

Solución

Se realiza la operación:

$$\frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{10}}{x} \text{ donde } x=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{10}\right)}{\frac{5}{4}}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$$

Por consiguiente, una cuarta proporcional de $\frac{5}{4},\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{10}$ es $\frac{1}{25}$

EJERCICIO 79

Encuentra la cuarta proporcional de los siguientes números:

1. 2, 5 y 15
2. 6, 8 y 24
3. 2, 5 y 14
4. 4, 3 y 32
5. 7, 5 y 63
6. 2, 4 y 5
7. 3, 6 y 8
8. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ y $\frac{2}{3}$
9. $\frac{5}{4}, \frac{7}{2}$ y $\frac{1}{4}$
10. $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ y $\frac{1}{2}$
11. $\frac{2}{5}, \frac{4}{3}$ y $\frac{1}{3}$
12. $\frac{3}{7}, \frac{5}{2}$ y $\frac{1}{4}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Tercera proporcional

Se llama así a cualquiera de los extremos de una proporción geométrica, es decir,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d} \text{ con } b \neq 0, d \neq 0$$

a es tercera proporcional entre *b* y *d*, en su defecto *d* es tercera proporcional entre *a* y *b*.

EJEMPLOS

1 Determina una tercera proporcional entre 4 y 12.

Solución

Se forma una proporción al tomar como medio a uno de los números dados y como último extremo a x

$$\frac{4}{12} = \frac{12}{x} \text{ entonces } x = \frac{(12)(12)}{4} = \frac{144}{4} = 36$$

Por tanto, una tercera proporcional es 36
Ahora, si se toma como medio el 4, entonces la proporción queda:

$$\frac{12}{4} = \frac{4}{x} \text{ entonces } x = \frac{(4)(4)}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Finalmente, otra tercera proporcional es $\frac{4}{3}$

EJERCICIO 80

Calcula una tercera proporcional.

1. 18 y 6
2. 24 y 4
3. 8 y 4
4. 18 y 9
5. 54 y 18
6. $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{6}$
7. $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{4}$
8. $\frac{5}{9}$ y $\frac{1}{18}$
9. $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{2}$
10. 9 y $\frac{3}{2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Regla de tres simple

Es la operación que se utiliza para encontrar el cuarto término en una proporción. A la parte que contiene los datos conocidos se le llama *supuesto* y a la que contiene el dato no conocido se le llama *pregunta*.

Directa. Se utiliza cuando las cantidades son directamente proporcionales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si 12 discos compactos cuestan \$600, ¿cuánto costarán 18?

Solución

Supuesto: 12 discos cuestan \$600
Pregunta: 18 discos cuestan x

Las cantidades son directamente proporcionales, ya que al aumentar el número de discos el precio también se incrementa. Se forma una proporción entre las razones del supuesto y la pregunta.

$$\frac{12}{18}=\frac{600}{x} \text{ donde } x=\frac{(600)(18)}{12}=\frac{10\,800}{12}=900$$

Por tanto, 18 discos compactos cuestan \$900

2 Una llave que se abre 4 horas diarias durante 5 días, vierte 5 200 litros de agua, ¿cuántos litros vertirá en 12 días si se abre 4 horas por día?

Solución

Se calcula el número de horas totales; es decir, en 5 días la llave ha estado abierta 20 horas y en 12 días la llave permaneció abierta 48 horas.

Supuesto: en 20 horas la llave ha vertido 5 200 litros.
Pregunta: en 48 horas la llave ha vertido x litros.

Las cantidades son directamente proporcionales, ya que al aumentar el número de horas también se incrementa el número de litros vertidos. Se forma una proporción entre las razones del supuesto y la pregunta.

$$\frac{20}{48}=\frac{5\,200}{x} \text{ donde } x=\frac{(5\,200)(48)}{20}=\frac{249\,600}{20}=12\,480$$

Por consiguiente, en 48 horas la llave vierte 12 480 litros.

Inversa. Se utiliza cuando las cantidades son inversamente proporcionales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Se ha planeado que una barda sea construida por 24 hombres en 18 días; sin embargo, sólo se logró contratar a 12 hombres, ¿en cuántos días la construirán?

Solución

Supuesto: 24 hombres construyen la barda en 18 días.
Pregunta: 12 hombres la construirán en x días.

Las cantidades son inversamente proporcionales, ya que al disminuir el número de hombres, los contratados tardarán más días en construirla.

Se forman las razones entre las cantidades.

Razón entre el número de hombres: $\frac{24}{12}$

Razón entre el número de días: $\frac{18}{x}$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se invierte cualquiera de las razones y se iguala con la otra, es decir:

$$\frac{x}{18}=\frac{24}{12} \text{ donde } x=\frac{(18)(24)}{12}=\frac{432}{12}=36$$

Por tanto, 12 hombres construyen la barda en 36 días.

2 Las ruedas traseras y delanteras de un automóvil tienen un diámetro de 1.5 m y 1 m, respectivamente, cuando las primeras han dado 350 vueltas, ¿cuántas han dado las segundas?

Solución

Supuesto: las ruedas traseras tienen un diámetro de 1.5 m y dan 350 vueltas.
Pregunta: las ruedas delanteras tienen un diámetro de 1 m y dan x vueltas.

Razón entre los diámetros: $\frac{1.5}{1}$

Razón entre el número de vueltas: $\frac{350}{x}$

Se invierte cualquiera de las razones y se iguala con la otra, es decir:

$$\frac{x}{350}=\frac{1.5}{1} \text{ donde } x=\frac{(350)(1.5)}{1}=\frac{525}{1}=525$$

Por consiguiente, las delanteras dan 525 vueltas.

EJERCICIO **81**

Resuelve los siguientes problemas:

1. El precio de 25 latas de aceite es de $248, ¿cuántas latas se podrán comprar con $1 240?
2. Liam escucha la radio durante 30 minutos, lapso en el que hay 7 minutos de anuncios comerciales; si escucha la radio durante 120 minutos, ¿cuántos minutos de anuncios escuchará?
3. Durante 70 días de trabajo Ana ganó $3 500, ¿cuánto ganaría si trabajara 12 días más?
4. Una llave abierta 6 horas diarias durante 7 días arrojó 6 120 litros de agua, ¿cuántos litros arrojará durante 14 días si se abre 4 horas diarias?
5. Un automóvil gasta 9 litros de gasolina cada 120 km. Si quedan en el depósito 6 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer?
6. En un libro de 80 páginas cada una tiene 35 líneas, ¿cuántas páginas tendrá el mismo libro si en cada una se colocan 40 líneas?
7. Una bodega se llena con 3 500 sacos de 6 kg de papas cada uno y otra de la misma capacidad se llena con sacos de 5 kg, ¿cuántos sacos caben en la segunda bodega?
8. Un leñador tarda 8 segundos en dividir en 4 partes un tronco de cierto tamaño, ¿cuánto tiempo tardará en dividir un tronco semejante en 5 partes?
9. Si un automóvil hizo 9 horas durante un recorrido de 750 kilómetros, ¿qué tiempo empleará en recorrer 2 250 kilómetros si su velocidad es constante?

10. Teresa tiene en su tienda varios sacos de harina de 18 kg y va a vender cada uno en \$108, pero como nadie quiere comprar por saco decide venderla por kilo. Su primer cliente le pidió 4 kg, ahora ella quiere saber cuánto debe cobrarle.
11. Don Arturo tiene una pastelería y sabe que para hacer un pastel de fresas para 8 personas utiliza 2 kg de azúcar, ¿qué cantidad de azúcar utilizará si le encargan un pastel, también de fresas, que alcance para 24 personas?
12. Ana, Fabián y Liam han ido a comprar discos compactos; Ana compró 2 de música grupera; Fabián 3 de rock alternativo y Liam compró 5 de heavy metal. Si en total se pagaron \$1 620 y todos cuestan lo mismo, ¿cuánto deberá pagar cada uno?
13. El valor de 25 m^2 de azulejo es de \$3 125. ¿Cuántos m^2 se comprarán con \$15 625?
14. Si 9 tarros tienen un precio de \$450, ¿cuántos tarros se comprarán con \$ 7 200?
15. Se compraron 40 kg de dulces para repartirlos equitativamente entre 120 niños. ¿Cuántos kilogramos se necesitarán para un grupo de 90 pequeños?
16. Un albañil gana \$1 500 mensuales. ¿Cuánto recibe por 20 días?
17. Fernando, Josué y Martín cobraron por resolver una guía de problemas de cálculo de varias variables \$975; Fernando trabajó 6 horas, Josué 4 horas y Martín 3 horas, ¿cuánto recibirá cada uno por hora de trabajo?
18. Un microbús cobra a una persona \$17.50 de pasaje por una distancia de 21 kilómetros, ¿cuánto pagará otra persona, cuyo destino está a 51 kilómetros de distancia?
19. Una piscina se llena en 10 horas con una llave que arroja 120 litros de agua por minuto, ¿cuántos minutos tardará para llenarse si esta llave arrojara 80 litros del líquido?
20. Un grupo de 45 estudiantes de CONAMAT contrata un autobús para ir a un evento y calculan que cada uno debe pagar \$50; finalmente sólo asisten 30 estudiantes, ¿cuánto deberá pagar cada uno?
21. Si 18 metros de alambre cuestan \$63. ¿Cuál será el precio de 42 m?
22. Si una docena de pañuelos cuesta \$200, ¿cuánto se pagará por 9 de ellos?
23. Una decena de canicas cuesta \$18, ¿cuántas podrá comprar un niño con \$5.40?
24. Un automóvil recorre 240 kilómetros con 60 litros de gasolina. ¿Cuántos litros necesita para recorrer 320 kilómetros?
25. Si 3 decenas de pares de zapatos cuestan \$18 000, ¿cuál será el precio de 25 pares?
26. Si 15 hombres hacen una obra de construcción en 60 días, ¿cuánto tiempo emplearán 20 hombres para realizar la misma obra?
27. Si 4 hombres terminan un trabajo en 63 días, ¿cuántos más deben de añadirse a los primeros para concluir el mismo trabajo en 28 días?
28. Un ciclista recorrió cierta distancia en 4 horas con una velocidad de 60 km/h, ¿qué velocidad deberá llevar para recorrer la misma distancia en 5 horas?
29. Si se llenan 24 frascos con capacidad para 250 gramos, con mermelada de fresa, ¿cuántos frascos de 300 gramos se pueden llenar con la misma cantidad de mermelada?
30. Un ejército de 900 hombres tiene víveres para 20 días; si se desea que las provisiones duren 10 días más, ¿cuántos hombres habrá que dar de baja?
31. Se desea plantar árboles dispuestos en 30 filas, de modo que cada fila tenga 24 de éstos. Si se colocan los mismos árboles en 18 filas, ¿cuántos se tendrán por fila?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Regla de tres compuesta

Se utiliza cuando se tienen más de 4 cantidades directa o inversamente proporcionales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Una guardería con 250 niños proporciona 4 raciones de alimentos diarios a cada pequeño durante 18 días. Si la población aumenta a 50 niños, ¿cuántos días durarán los alimentos si se disminuyen a 3 raciones diarias?

Solución

Se forman las razones entre las cantidades.
A más niños los alimentos duran menos días, por tanto la proporción es inversa.
A menos raciones los alimentos duran más días, por tanto la proporción es inversa.

250 niños	4 raciones	18 días
300 niños	3 raciones	x días
Inversa	**Inversa**	

Las razones $\frac{250}{300}$ y $\frac{4}{3}$ se invierten y multiplican, la razón $\frac{18}{x}$ se iguala con el producto.

$$\left(\frac{300}{250}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{18}{x}$$

Entonces, $x=\frac{(18)(250)(4)}{(300)(3)}=\frac{18\,000}{900}=20$

Por tanto, los alimentos durarán 20 días.

2 15 cajas de aceite con 18 galones cuestan $960, ¿cuánto cuestan 9 cajas con 20 galones?

Solución

Se forman las razones entre las cantidades.
Si el número de cajas disminuye el precio disminuye, por tanto es una proporción directa.
Si el número de galones aumenta el precio aumenta, por tanto es una proporción directa.

15 cajas	18 galones	$960
9 cajas	20 galones	x
Directa	**Directa**	

Las razones $\frac{15}{9}$ y $\frac{18}{20}$ se multiplican sin invertir porque son directas y la razón $\frac{960}{x}$ se iguala con el producto.

$$\left(\frac{15}{9}\right)\left(\frac{18}{20}\right)=\frac{960}{x}$$

Entonces, $x=\frac{(960)(9)(20)}{(15)(18)}=\frac{172\,800}{270}=640$

Por consiguiente, 9 cajas de 20 galones cuestan $640

3 Se calcula que para construir una barda de 600 m en 18 días, trabajando 8 horas diarias, se necesitan 12 hombres, ¿cuántos días tardarán 8 hombres trabajando 6 horas diarias para construir una barda de 400 m?

Solución

Se forman las razones entre las cantidades.

12 hombres	8 horas	600 m	18 días
8 hombres	6 horas	400 m	x días
Inversa	**Inversa**	**Directa**	

$$\left(\frac{8}{12}\right)\left(\frac{6}{8}\right)\left(\frac{600}{400}\right)=\frac{18}{x}$$

Donde $x=\frac{(18)(12)(8)(400)}{(8)(6)(600)}=\frac{691200}{28\,800}=24$

Por tanto, 8 hombres tardarán 24 días trabajando 6 horas diarias.

EJERCICIO 82

Resuelve los siguientes problemas:

1. Andrea lee un libro de 500 páginas en 20 días y lee 1 hora diaria, ¿cuántos minutos debe leer diariamente para que en condiciones iguales lea un libro de 800 páginas en 15 días?
2. El padre de Alejandro contrató a 15 obreros que, al trabajar 40 días durante 10 horas diarias, construyeron en su casa una alberca con capacidad para 80 000 litros de agua; si Alejandro contrata a 10 de esos obreros para que trabajen 6 horas diarias y construyan otra alberca con capacidad para 40 000 litros de agua, ¿cuántos días tardarán en construirla?
3. Una fábrica proporciona botas a sus obreros, si 4 obreros gastan 6 pares de botas en 120 días, ¿cuántos pares de botas gastarán 40 obreros en 300 días?
4. La tripulación de un barco la forman el capitán, 5 ayudantes y 6 investigadores. El capitán programa las raciones de agua a razón de 8 litros diarios para toda la tripulación en un viaje de 6 días, pero a la hora de zarpar 2 de los investigadores deciden quedarse. Debido a esto se decide que el viaje dure 2 días más, ¿cuál debe ser la ración diaria de agua?
5. Si 24 motocicletas repartidoras de pizzas gastan $27 360 en gasolina durante 30 días trabajando 8 horas diarias, ¿cuánto dinero se deberá pagar por concepto de gasolina para 18 motocicletas que trabajan 10 horas diarias durante 6 meses? (considera meses de 30 días).

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Tanto por ciento

El tanto por ciento de una cantidad es el número de partes que se toman, de las cien en las que se divide dicha cantidad. Se representa con el símbolo % o en forma de fracción.

Ejemplo

El 8% de 48, equivale a tomar 8 centésimas $\left(\frac{8}{100}=0.08\right)$ de 48, es decir, se divide 48 en 100 partes y se toman 8.

EJERCICIO 83

Representa en forma decimal los siguientes por cientos:

1. 3%	4. 8%	7. 5%	10. 50%	13. 4.5%
2. 4%	5. 15%	8. 25%	11. 75%	14. 0.08%
3. 6%	6. 1%	9. 30%	12. 32%	15. 0.03%

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para obtener un tanto por ciento se construye una regla de tres simple.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el 25% de 150?

Solución

Se forma la regla de tres:

Supuesto: 100% es a 150
Pregunta: 25% es a x.

$$\frac{100}{25}=\frac{150}{x} \text{ donde } x=\frac{(150)(25)}{100}=\frac{3\,750}{100}=37.5$$

Por consiguiente, 37.5 es el 25% de 150

2 Calcula el 12% de 1 500.

Solución

Otra forma de obtener un porcentaje es hallar la fracción decimal $\frac{12}{100}=0.12$ y multiplicarla por 1 500, es decir:

$$(0.12)(1500)=180$$

Entonces, 180 es el 12% de 1 500

3 Obtén el $\frac{2}{3}$% de 2 400.

Solución

Se forma la regla de tres:

Supuesto: 100% es a 2 400

Pregunta: $\frac{2}{3}$% es a x.

$$\frac{100}{\frac{2}{3}}=\frac{2\,400}{x} \text{ donde } x=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)(2\,400)}{100}=\frac{1600}{100}=16$$

Entonces, 16 representa el $\frac{2}{3}$% de 2 400

EJERCICIO **84**

Calcula los siguientes porcentajes:

1. 6% de 300
2. 8% de 1 250
3. 35% de 715
4. 3.5% de 150
5. $\frac{1}{5}$% de 385
6. 3% de 50
7. 35% de 4 500
8. 75% de 30
9. 12% de 3 856
10. $\frac{1}{2}$% de 8 750
11. 4% de 120
12. 25% de 5 000
13. 48% de 6 520
14. 9.8% de 2 857
15. $\frac{19}{6}$% de 1 958
16. 5% de 163
17. 50% de 2 800
18. 28% de 5 848
19. 20.3% de 372
20. $\frac{12}{5}$% de 345

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para obtener el 100% de una cantidad, se emplea una regla de tres.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿De qué número 480 es el 30%?

Solución

Se quiere encontrar el 100%

Supuesto: 30% es a 480
Pregunta: 100% es a x.

Se forma la proporción.

$$\frac{30}{100}=\frac{480}{x} \text{ entonces } x=\frac{(480)(100)}{30}=\frac{48\,000}{30}=1\,600$$

Por consiguiente, 480 es el 30% de 1 600

EJERCICIO 85

Encuentra el número del que:

1. 200 es el 4%
2. 1 585 es el 20%
3. 2 850 es el 30%
4. 125 es el 8%
5. 1 285 es el 80%
6. 213.75 es el 7.5%
7. 300 es el 5%
8. 1 485 es el 75%
9. 748.25 es el 20.5%

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para que obtengas el porcentaje que representa un número de otro, observa los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Qué porcentaje de 985 representa 443.25?

Solución

Se establecen las proporciones:

Supuesto: 100% es a 985
Pregunta: x es a 443.25

$$\frac{100}{x}=\frac{985}{443.25} \text{ entonces } x=\frac{(100)(443.25)}{985}=\frac{44\,325}{985}=45$$

Por tanto, 443.25 es el 45% de 985

2 ¿Qué porcentaje de 6 000 es 1 200?

Solución

Se establecen las proporciones:

Supuesto: 100% es a 6 000
Pregunta: x es a 1 200

$$\frac{100}{x}=\frac{6\,000}{1200} \text{ entonces } x=\frac{(100)(1200)}{6\,000}=\frac{120\,000}{6\,000}=20$$

Por tanto, 1 200 es el 20% de 6 000

EJERCICIO 86

Calcula el porcentaje que representa:

1. 54 de 270
2. 180 de 600
3. 956 de 3 824
4. 13 618.5 de 32 425
5. 5 616 de 15 600
6. 6 720 de 28 000
7. 8 142 de 54 280
8. 6 128.22 de 36 000
9. 29 399.29 de 127 823
10. 54 000 de 160 000

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Una tienda de aparatos electrónicos decide dar 30% de descuento en toda su mercancía; si el precio normal de un televisor es de \$6 000, ¿cuánto se pagará en caja?

Solución

Se obtiene el 30% de \$6 000

$$(0.30)(6\,000)=1800$$

El resultado se resta de 6 000

$$6\,000 - 1\,800 = 4\,200$$

Otra forma de obtener el precio es:

Como hay un descuento del 30%, al comprar el televisor sólo se pagará en caja el 70% del precio normal, es decir:

$$\left(\frac{70}{100}\right)(6\,000)=(0.70)(6\,000)=4\,200$$

Por tanto, el precio del televisor con el descuento será de \$4 200

2 Un ganadero tiene 240 reses de las cuales 25% se enferma. De las reses enfermas sólo 5% sobrevive y 30% de las que no enfermaron se vendieron, ¿cuántas reses le quedaron al ganadero?

Solución

Se obtiene 25% de 240

$$(0.25)(240)=60 \text{ (0.2reses enfermas}$$

$$240-60=180 \text{ reses no se enfermaron}$$

De las 60 reses enfermas sólo 5% sobreviven.

$$(0.05)(60)=3 \text{ reses sobreviven}$$

El ganadero vende 30% de las 180 que no enfermaron.

$$(0.30)(180)=54 \text{ reses vendidas}$$

Le quedan $180-54=126$

Por tanto, el ganadero tiene 126 + 3 = 129 reses.

3 Laura compró un refrigerador en $3 500, el precio incluía 30% de descuento, ¿cuál era el costo sin descuento?

Solución

3 500 representa 70% del precio normal, se calcula qué número representa 100%, es decir, se construye una regla de tres.

$$\frac{3500}{x}=\frac{70}{100} \text{ entonces, } x=\frac{(3500)(100)}{70}=\frac{350\,000}{70}=5\,000$$

Por consiguiente, $5 000 es el precio sin descuento.

4 Un estanque con capacidad para 600 litros contiene tres cuartas partes de agua, si se le agregan 100 litros más, ¿qué porcentaje del estanque está lleno?

Solución

Se obtienen las tres cuartas partes de 600

$$\left(\frac{3}{4}\right)(600)=\frac{1800}{4}=450$$

El estanque tenía 450 litros, al agregarle 100 litros más ahora contiene 550
Luego se divide 550 por 600 y el resultado se multiplica por 100

$$\left(\frac{550}{600}\right)(100)=\frac{55\,000}{600}=91.66$$

El estanque está lleno en 91.66% de su capacidad.

5 La casa de María está valuada en 25% más que la de Alejandro, si la de Alejandro tiene un precio de $600 000, ¿cuánto costará la de María?

Solución

Si la casa de María está valuada en 25% más, es decir, 100% + 25% = 125% de la de Alejandro, se construye una regla de tres.

$$\frac{600\,000}{x}=\frac{100}{125} \text{ entonces, } x=\frac{(600\,000)(125)}{100}=\frac{75\,000\,000}{100}=750\,000$$

Por tanto, la casa de María costará $750 000

6 Luis recibe un ultimátum por parte de la empresa donde trabaja, de que si vuelve a tener un retraso el siguiente mes cobrará 15% menos de su sueldo mensual, el cual asciende a $12 000, no obstante Luis faltó, ¿cuánto cobrará el siguiente mes?

Solución

Su sueldo será 15% menos entonces Luis cobrará 85% de su salario, se construye una regla de tres:

$$\frac{12\,000}{x}=\frac{100}{85} \text{ entonces, } x=\frac{(12\,000)(85)}{100}=\frac{1\,020\,000}{100}=10\,200$$

Por tanto, Luis cobrará $10 200

7 Patricia le pidió un préstamo de \$24 000 a un amigo y éste le dice que debe pagarle mensualmente 20% de la deuda. En 3 meses, ¿cuánto le habrá pagado?

Solución

Se obtiene 20% de 24 000

$$(0.20)(24\,000) = 4\,800 \text{ pagará por mes}$$

En 3 meses

$$(3)(4\,800) = 14\,400$$

Por consiguiente, Patricia después de 3 meses habrá pagado \$14 400

8 En una caja hay 6 canicas azules, 5 rojas y 7 verdes, ¿cuál es el porcentaje de canicas azules?

Solución

El número total de canicas es 18, se construye la regla de tres:

Supuesto: 100% es a 18
Pregunta: x es a 6

Se forma la proporción.

$$\frac{100}{x} = \frac{18}{6} \text{ entonces } x = \frac{(6)(100)}{18} = \frac{600}{18} = 33.33$$

Entonces, en la caja hay 33.33% de canicas azules.

EJERCICIO 87

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un salón tiene capacidad para 80 alumnos, 20% se presenta puntualmente. ¿Cuántos estudiantes son impuntuales?
2. Una licuadora costó \$500, pero al comprarla se hizo un descuento de 12% al cliente. ¿Cuál es el precio que se pagó?
3. El precio de una máquina de coser es de \$ 3 500 y se pagó un enganche de 15%. ¿Cuánto se adeuda?
4. Se compró una guitarra de \$12 500 al contado y se hizo un descuento de 8.5%. ¿Cuánto se pagó?
5. ¿Cuál es el enganche de un televisor que costó \$5 500 si se pidió de anticipo 21% del precio?
6. Una persona vende una aspiradora en \$851, venta por la que obtuvo una utilidad de 15% sobre el precio. ¿De cuánto fue su ganancia?
7. Una bicicleta de \$6 800 se compró con un enganche de 12% y a pagar el saldo en 4 abonos mensuales. ¿De cuánto es cada pago?
8. Si un televisor cuesta \$10 500 y se da un enganche de 8%, ¿cuánto se pagará en cada letra si el saldo es a cubrirse en 8 pagos?
9. Si Juan Carlos ganó 12% al vender una bicicleta que le costó \$1 120, ¿en cuánto la vendió?
10. El valor de una casa es de \$655 000 al contado, pero al venderla a plazos se le carga 25.5% de su precio. ¿Cuál es el costo final de la casa si se vende a plazos?
11. Javier pagó \$2 550 por una consola de videojuegos, la cual tenía un descuento de 15%, ¿cuál era su precio sin descuento?
12. Antonio compró un reproductor de DVD en \$2 125, el aparato tenía 20% de descuento; sin embargo, la persona que le cobró sólo le descontó 15%, ¿cuánto tenía que haber pagado Antonio?

13. Un equipo de básquetbol tuvo 29 derrotas durante 80 juegos, ¿cuál fue el porcentaje de victorias?
14. Alejandro contestó 90 de 120 preguntas de un examen. Si está seguro de haber contestado correctamente 70% de las 90, ¿cuántas preguntas de las restantes deberá contestar acertadamente para tener 70% del examen bien contestado?
15. Adrián compró un automóvil en $120 000, el precio incluía entre seguro, impuestos y accesorios 25% más, ¿cuál era el precio del automóvil sin contar con seguro, impuestos y accesorios?
16. Paola compró una bicicleta de montaña en $800, si el precio incluía una rebaja de 20%, ¿cuál era el precio normal de la bicicleta?
17. Jaime tiene una deuda de $180 000, si 30% de esa cantidad se la debe a su hermano y el resto a su tío Alberto, ¿cuánto le debe a su tío?
18. Un fraccionamiento está dividido en lotes, arriba y en la parte inferior de un cerro. Un lote en la parte superior del cerro cuesta 15% menos que en la parte inferior, si el precio de este último es de $224 000, ¿cuál es el costo de un lote en la parte superior?
19. Un proveedor compra cajas con aguacates en $60 cada una y las vende con una ganancia de 60% por caja, ¿cuánto ganará si compra 80 cajas?
20. Para aprobar un examen de 60 reactivos, Mónica tiene que contestar correctamente 75% de éste, ¿cuál es el mínimo de preguntas que deberá contestar acertadamente para aprobarlo?
21. En una liga de futbol se juegan 49 partidos; si el equipo de Juan al final de la temporada tiene 20 victorias y 6 empates, ¿cuál es el porcentaje de derrotas?
22. Un contenedor de leche con capacidad para 800 litros está lleno en sus dos quintas partes, si se agregan 80 litros más, ¿qué porcentaje del contenedor se encuentra lleno?
23. En un partido de baloncesto, Ricardo encestó 4 tiros de 3 puntos, 6 de tiro libre y 8 de cualquier otra parte. Si en total hizo 40 tiros a la canasta, ¿cuál es el porcentaje de efectividad?
24. En un librero hay 8 libros de cálculo diferencial, 5 de cálculo integral, 6 de álgebra y 10 de geometría, ¿cuál es el porcentaje de libros de geometría?
25. Si en una escuela hay 320 alumnos, de los cuales 135 son mujeres, ¿cuál es el porcentaje de hombres?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Interés simple

Para analizar este tema, es necesario describir algunos conceptos:

Interés. Es la cantidad de dinero que se obtiene por prestar o invertir cierta cantidad de dinero. El interés simple es el que se obtiene al final de un periodo, el cual es constante durante el tiempo que el dinero se encuentra en préstamo o en inversión.

Tasa. Es el tanto por ciento que se cobra en uno o varios periodos.

Capital. Cantidad de dinero que se presta o invierte.

Fórmulas para determinar el interés simple

Supongamos que queremos prestar un capital C a una tasa de $r\%$ para que en 1 año obtengamos un capital I, entonces se obtiene el $r\%$ de C mediante una regla de tres, es decir:

Supuesto: 100% es a C
Pregunta: $r\%$ es a I

Se forma la proporción.

$$\frac{100}{r}=\frac{C}{I} \text{ entonces } I=\frac{C\cdot r}{100}$$

Como el interés ganado es constante, entonces, si queremos el interés I en t años, se tiene que:

$$I=\left(\frac{C\cdot r}{100}\right)(t)=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}$$

Si el tiempo es en meses, entonces el tiempo será: $\frac{t}{12}$, por lo tanto el interés será:

$$I=\left(\frac{C\cdot r}{100}\right)\left(\frac{t}{12}\right)=\frac{C\cdot r\cdot t}{1200}$$

Si el tiempo está representado en días, entonces el tiempo será: $\frac{t}{360}$, por consiguiente el interés será:

$$I=\left(\frac{C\cdot r}{100}\right)\left(\frac{t}{360}\right)=\frac{C\cdot r\cdot t}{36\,000}$$

En resumen, si se quiere obtener el interés simple I de un capital C a una tasa de $r\%$, en cierto periodo, las fórmulas son:

Si el tiempo está en años	Si el tiempo está en meses	Si el tiempo está en días
$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}$	$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{1200}$	$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{36\,000}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el interés simple que se obtendrá en 10 años si se invierten \$25 000 a una tasa de interés de 18%?

Solución

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
C = 25 000 r = 18% t = 10 años I =?	$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}$	$I=\frac{(25\,000)(18)(10)}{100}$ $I=\frac{4\,500\,000}{100}$ $I=45\,000$	I = 45 000

Por tanto, se obtendrán \$45 000 de interés al cabo de 10 años.

2 Andrés pide un préstamo al banco de \$240 000 con un interés de 32% anual, ¿qué interés le cobrarán en 8 meses?

Solución

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
C = 240 000 r = 32% t = 8 meses I =?	$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{1200}$	$I=\frac{(240\,000)(32)(8)}{1200}$ $I=\frac{61\,440\,000}{1200}$ $I=51\,200$	I = 51 200

Por consiguiente, el banco le cobrará a Andrés \$51 200 por concepto de interés.

Fórmulas para el cálculo del capital, el tiempo y la tasa

Si el tiempo está en años

Capital	**Tiempo**	**Tasa**
$C=\frac{100\cdot I}{t\cdot r}$	$t=\frac{100\cdot I}{C\cdot r}$	$r=\frac{100\cdot I}{C\cdot t}$

Si el tiempo está en meses

Capital	**Tiempo**	**Tasa**
$C=\frac{1200\cdot I}{t\cdot r}$	$t=\frac{1200\cdot I}{C\cdot r}$	$r=\frac{1200\cdot I}{C\cdot t}$

Si el tiempo está en días

Capital	**Tiempo**	**Tasa**
$C=\frac{36\,000\cdot I}{t\cdot r}$	$t=\frac{36\,000\cdot I}{C\cdot r}$	$r=\frac{36\,000\cdot I}{C\cdot t}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Qué capital se debe invertir para obtener un interés de $60 000 a una tasa de 10% en 6 años?

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
I = 60 000 r = 10% t = 6 años C =?	$C=\frac{100\cdot I}{t\cdot r}$	$C=\frac{(100)(60\,000)}{(6)(10)}$ $C=\frac{6\,000\,000}{60}$ $C=100\,000$	C = $100 000

Por tanto, se deben invertir $100 000

2 ¿Cuánto tiempo estuvo impuesto un capital de $250 000 a 25% anual, si generó un interés de $31 250 y se pagó antes del primer año?

Solución

Como se pagó antes de terminar el primer año, el tiempo está dado en meses.

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
C = 250 000 r = 25% I = 31 250 t =?	$t=\frac{1200\cdot I}{C\cdot r}$	$t=\frac{(1200)(31250)}{(250\,000)(25)}$ $t=\frac{37\,500\,000}{6\,250\,000}$ $t=6$	t = 6 meses

Por tanto, estuvo impuesto durante 6 meses.

3 ¿Cuál es la tasa de interés anual que un banco estableció a un capital de $300 000, si después de 10 años se obtuvieron intereses por $60 000?

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
C = 300 000 t = 10 años I = 60 000 r = ?	$r=\frac{100\cdot I}{C\cdot t}$	$r=\frac{(100)(60\,000)}{(300\,000)(10)}$ $r=\frac{6\,000\,000}{3\,000\,000}$ $r=2$	r = 2%

Entonces, la tasa de interés fue de 2%.

EJERCICIO 88

Resuelve los siguientes problemas:

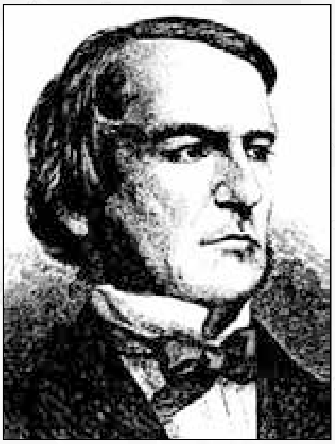
1. ¿Qué interés anual producirá un capital de $50 000 en 6 años a 11%?
2. ¿Qué interés por año producirá un capital de $380 000 en 5 años a 28%?
3. ¿Qué interés anual produce un capital de $220 000 en 8 años a 8%?
4. Determinar cuánto de intereses produce un capital de $56 800 en 3 años a 13.125% anual.
5. Calcular el interés que produce un capital de $480 000 a 6.3% anual en 2 años.
6. Una persona paga 14.5% anual de interés por un préstamo hipotecario de $385 000. ¿Cuánto tiene que pagar por concepto de intereses, si liquida su deuda al cabo de 10 años?
7. Víctor tiene ahorrados $280 000 en el Banco de Comercio. Si esta institución bancaria paga por concepto de intereses 6.2% anual, ¿qué interés ganará su capital a los 6 años?
8. Precisar el interés que produce un capital de $132 000 a 18.5% durante 8 meses.
9. ¿Qué interés producirá un capital de $12 857 en 16 meses a 21.5% anual?
10. Por un préstamo de $16 800 el padre de Carlos tiene que pagar 18% de interés anual. ¿Cuánto pagará durante 9 meses?
11. Un capital de $80 000 produce un interés de $12 000 al cabo de 5 años. ¿A qué tasa de interés anual se invirtió?
12. Calcular el interés que producen $50 000 a una tasa del 12.5% durante 4 años.
13. ¿Qué capital se debe invertir para obtener una ganancia de $24 000 a 12% de interés anual en 4 años?
14. ¿A qué tasa de interés anual quedó impuesto un capital de $48 000, si generó $12 000 de intereses en 10 meses?
15. ¿Cuánto tiempo estuvo impuesto un capital de $160 000 a 20% de interés anual, si generó $48 000 de intereses?
16. Si un capital de $980 000 generó $199 920 de intereses en 20 años, ¿cuál fue la tasa de interés a la que se impuso?
17. ¿Cuánto se debe invertir para que en 90 días un capital impuesto a 24% anual genere un interés de $27 000?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 9

Sistemas de numeración

Reseña HISTÓRICA



Sistema binario

George Boole fue un matemático inglés que en 1854 publicó *Las leyes del pensamiento*, las cuales sustentan las teorías matemáticas de la lógica y la probabilidad. Boole llevó a la lógica en una nueva dirección al reducirla a una álgebra simple, las matemáticas, así incorporó la lógica. Estableció la analogía entre los símbolos algebraicos y aquellos que representan las formas lógicas. Su álgebra consiste en un método para resolver problemas de lógica que recurre solamente a los valores binarios 1 y 0 y a tres operadores: AND (y), OR (o) y NOT (no). Comenzó el álgebra de la lógica llamada álgebra booleana, la cual ahora encuentra aplicación en la construcción de computadoras, circuitos eléctricos, etcétera.

Los sistemas de cómputo modernos trabajan a partir de la lógica binaria. Las computadoras representan valores mediante dos niveles de voltaje (generalmente 0V y 5V), con estos niveles podemos representar exactamente dos valores diferentes, que por conveniencia son cero y uno, los cuales representan apagado y encendido.

Sistemas de numeración antiguos

El hombre para contar empezó por utilizar su propio cuerpo: los dedos de la mano, los de los pies, los brazos, las piernas, el torso y la cabeza, las falanges y las articulaciones.

Mucho tiempo después, hacia 3300 a.n.e., apareció la representación escrita de los números, en paralelo al nacimiento de la escritura, en Sumeria (Mesopotamia). En las primeras tablillas de arcilla que han revelado la escritura, aparecen signos específicos destinados a representar los números.

En cada cultura se empleó una forma particular de representar los números. Por ejemplo, los babilonios usaban tablillas con varias marcas en forma de cuña y los egipcios usaban jeroglíficos, que aún aparecen en las paredes y columnas de los templos. Las cifras que hoy utilizamos tienen su origen en las culturas hindú y árabe.

George Boole (1815-1864)

Definición

Un sistema de numeración es un conjunto de símbolos (números) que se relacionan para expresar cantidades. A través de la historia del hombre aparecen varios sistemas de numeración, que dependen de la época o la cultura. Los sistemas de numeración se clasifican en posicionales y no posicionales.

Sistema posicional. Cada símbolo que se utiliza en este sistema se llama dígito, el número de dígitos corresponde al número de base, es fundamental la existencia del cero. Estos sistemas se basan en la posición que ocupa cada dígito (valor relativo) en el número, esto permite que se puedan representar números mayores a la base.

En los sistemas posicionales los números se representan con la siguiente fórmula:

$$N_{(B)} = A_n \cdot B^n + A_{n-1} \cdot B^{n-1} + ... + A_1 \cdot B^1 + A_0 \cdot B^0 + A_{-1} \cdot B^{-1} + A_{-2} \cdot B^{-2} + ... + A_{-n} \cdot B^{-n}$$

Donde: $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_1, A_0, A_{-1}, A_{-2}, \ldots, A_{-n}$ son los dígitos.
B es el número de base
n posición

Para identificar el sistema se coloca la base B como subíndice $N_{(B)}$. Los sistemas más utilizados son: el decimal (base 10), binario (base 2), octal (base 8) y hexadecimal (base 16), entre otros.

Sistema decimal ($N_{(10)}$). Se utilizan los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 los que, como ya se dijo, no representan sólo esos 10 números, sino que al acomodarlos en determinada posición representarán diferentes cantidades. La posición nos indica la magnitud de la cantidad representada, a cada posición se le asigna una potencia de 10 la cual se llama peso.

Ejemplo

Representa el número $573_{(10)}$ en potencia de 10 con la fórmula:

$$573_{(10)} = 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

Ejemplo

La representación en potencia de 10 del número $424.32_{(10)}$ es:

$$424.32_{(10)} = 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}$$

El subíndice 10 se omite la mayoría de las veces, ya que al ser el sistema decimal que utilizamos, se sobrentiende que la base es 10.

Sistema binario ($N_{(2)}$). Sistema posicional que utiliza 2 dígitos (base 2), el 0 y el 1, los pesos de la posición son potencias de 2.

Ejemplo

Representa el número $11101.11_{(2)}$ en potencia de 2 con la fórmula:

$$N_{(10)} = 11101.11_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$$

Cada dígito del sistema se conoce como dígito binario o bit (*binary digit*). Este sistema que puede ser un poco engorroso para nosotros, no lo es para una computadora, ya que ésta sólo admite 2 estados posibles, encendido o apagado, que equivale a decir pasa corriente o bien no pasa corriente. De tal forma que cuando pasa se asigna el 1 y cuando no pasa se asigna el 0.

Sistema octal ($N_{(8)}$). Sistema posicional que utiliza 8 dígitos (base 8), el 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, así la posición de cada dígito tendrá como peso una potencia de 8.

Ejemplo

Representa el número $234_{(8)}$ en potencia de 8 con la fórmula:

$$N_{(10)} = 234_{(8)} \quad = 2\times 8^2 + 3\times 8^1 + 4\times 8^0$$

Una de las aplicaciones de este sistema es que la conversión de binario a octal es muy sencilla, como se verá más adelante, ya que por cada 3 dígitos en binario se utiliza un solo dígito en octal.

Sistema hexadecimal ($N_{(16)}$). Sistema posicional que utiliza 16 símbolos (base 16), el 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y las letras A, B, C, D, E, F, así la posición de cada dígito tendrá como peso una potencia de 16.

Ejemplos

Representa los números $2405_{(16)}$ y $3AB.2D_{(16)}$ en potencia de 16 con la fórmula

$$N_{(10)} = 2405_{(16)} \quad = 2\times 16^3 + 4\times 16^2 + 0\times 16^1 + 5\times 16^0$$

$$N_{(10)} = 3AB.2D_{(16)} = 3\times 16^2 + A\times 16^1 + B\times 16^0 + 2\times 16^{-1} + D\times 16^{-2}$$

La utilidad de este sistema radica en que al igual que en el octal, la conversión de binario a hexadecimal es muy sencilla, ya que por cada 4 bits se utiliza solamente un dígito hexadecimal.

Un byte es la unidad de memoria usada por una computadora y equivale a 8 bits, de tal forma que 2 bytes ocupan 4 dígitos hexadecimales, 4 bytes (32 bits) 8 dígitos hexadecimales y así sucesivamente.

Sistemas en otra base. Hasta aquí sólo se nombraron algunos sistemas, sin embargo existen otros que aunque no son comunes cumplen con las características de un sistema posicional.

- **Sistema ternario ($N_{(3)}$)**
  Sistema posicional que utiliza 3 dígitos (base 3): 0, 1, 2
- **Sistema cuaternario ($N_{(4)}$)**
  Sistema posicional que utiliza 4 dígitos (base 4): 0, 1, 2, 3
- **Sistema quinario ($N_{(5)}$)**
  Sistema posicional que utiliza 5 dígitos (base 5): 0, 1, 2, 3, 4

EJERCICIO 89

Transforma los siguientes números en potencias de acuerdo con la base:

1. $48_{(10)}$
2. $153_{(10)}$
3. $96.722_{(10)}$
4. $101011_{(2)}$
5. $1001.101_{(2)}$
6. $102.11_{(3)}$
7. $423.0142_{(5)}$
8. $1746.235_{(8)}$
9. $60007.51_{(8)}$
10. $2AF_{(16)}$
11. $1BA.4E_{(16)}$
12. $C.24AB_{(16)}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Conversiones

Dado un número en un sistema de numeración en base B, el número se puede representar en otro sistema. A continuación se explican diversos métodos.

Conversión de un número en base "B" a base 10 $N_{(B)} \longrightarrow N_{(10)}$

Existen 2 métodos utilizando la fórmula y en el caso de números enteros el de "multiplicar por la base".

- **Método por fórmula**

$$N_{(10)} = A_n \cdot B^n + A_{n-1} \cdot B^{n-1} + ... + A_1 \cdot B^1 + A_0 \cdot B^0 + A_{-1} \cdot B^{-1} + A_{-2} \cdot B^{-2} + ... + A_{-n} \cdot B^{-n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma $1231_{(4)}$ a base decimal.

Solución

$$\begin{aligned} N_{(10)} = 1231_{(4)} &= 1\times 4^3 + 2\times 4^2 + 3\times 4^1 + 1\times 4^0 \\ &= 1\times 64 + 2\times 16 + 3\times 4 + 1\times 1 \\ &= 64 + 32 + 12 + 1 \\ &= 109_{(10)} \end{aligned}$$

Por tanto, $1231_{(4)}$ equivale a $109_{(10)}$

2 Convierte $20143_{(5)}$ a base 10.

Solución

$$\begin{aligned} N_{(10)} = 20143_{(5)} &= 2\times 5^4 + 0\times 5^3 + 1\times 5^2 + 4\times 5^1 + 3\times 5^0 \\ &= 2\times 625 + 0\times 125 + 1\times 25 + 4\times 5 + 3\times 1 \\ &= 1250 + 0 + 25 + 20 + 3 \\ &= 1298_{(10)} \end{aligned}$$

Por consiguiente, $20143_{(4)}$ equivale a $1\,298_{(10)}$

3 Cambia $N_{(2)} = 1011101.101_{(2)}$ a $N_{(10)}$.

Solución

$$\begin{aligned} 1011101.101_{(2)} &= 1\times 2^6 + 0\times 2^5 + 1\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 + 1\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} \\ &= 1\times 64 + 0\times 32 + 1\times 16 + 1\times 8 + 1\times 4 + 0\times 2 + 1\times 1 + 1\times 0.5 + 0\times 0.25 + 1\times 0.125 \\ &= 64 + 0 + 16 + 8 + 4 + 0 + 1 + 0.5 + 0 + 0.125 \\ &= 93.625_{(10)} \end{aligned}$$

Por tanto, $N_{(2)} = 1011101.101_{(2)}$ equivale a $N_{(10)} = 93.625_{(10)}$

4 Convierte $34AC_{(13)}$ a base 10.

Solución

Las letras se utilizan para números mayores de 2 dígitos, es decir A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, …, etc. Al aplicar la fórmula se tiene:

$$\begin{aligned} N_{(10)} &= 3\times 13^3 + 4\times 13^2 + A\times 13^1 + C\times 13^0 \\ &= 3\times 2197 + 4\times 169 + 10\times 13 + 12\times 1 \\ &= 6\,591 + 676 + 130 + 12 \\ &= 7\,409_{(10)} \end{aligned}$$

Por consiguiente, $34AC_{(13)}$ equivale a $7\,409_{(10)}$

5 Convierte $274.32_{(8)}$ a base 10.

Solución

$$\begin{aligned} 274.32_{(8)} &= 2\times 8^2 + 7\times 8^1 + 4\times 8^0 + 3\times 8^{-1} + 2\times 8^{-2} \\ &= 2\times 64 + 7\times 8 + 4\times 1 + 3\times 0.125 + 2\times 0.015625 \\ &= 128 + 56 + 4 + 0.375 + 0.03125 \\ &= 188.40625_{(10)} \end{aligned}$$

Por tanto, $274.32_{(8)}$ equivale a $188.40625_{(10)}$

6 Transforma $N_{(16)} = 5AF.84_{(16)}$ a $N_{(10)}$.

Solución

$$\begin{aligned} 5AF.84_{(16)} &= 5\times 16^2 + A\times 16^1 + F\times 16^0 + 8\times 16^{-1} + 4\times 16^{-2} \\ &= 5\times 256 + 10\times 16 + 15\times 1 + 8\times 0.0625 + 4\times 0.00390625 \\ &= 1280 + 160 + 15 + 0.5 + 0.015625 \\ &= 1455.515625_{(10)} \end{aligned}$$

Por consiguiente, $N_{(10)}$ equivale a $1\,455.515625_{(10)}$

- **Método de la multiplicación por la base y suma del siguiente dígito.** Este método sólo se utiliza para números enteros y consiste en multiplicar el primer dígito (de izquierda a derecha), por la base y sumar el dígito siguiente, el resultado de la suma se multiplica por la base y el resultado se suma con el dígito que le sigue, así hasta el último dígito. El resultado final será el número decimal equivalente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma $11011_{(2)}$ a base 10.

Solución

Al seguir los pasos se obtiene:

$\mathbf{1}\times 2+\mathbf{1}=$	3	Producto del primer dígito por la base, más el segundo dígito.
$3\times 2+\mathbf{0}=$	6	Producto del resultado anterior por la base, más el tercer dígito.
$6\times 2+\mathbf{1}=$	13	Producto del resultado anterior por la base, más el cuarto dígito.
$13\times 2+\mathbf{1}=$	27	Producto del resultado anterior por la base, más el quinto dígito.
	27	Valor equivalente.

Por tanto, $11011_{(2)}$ equivale a $27_{(10)}$

2 Convierte $25713_{(8)}$ a base 10.

Solución

Al seguir los pasos se obtiene:

$\mathbf{2} \times 8 + \mathbf{5} =$	21	Producto del primer dígito por la base, más el segundo dígito.
$21 \times 8 + \mathbf{7} =$	175	Producto del resultado anterior por la base, más el tercer dígito.
$175 \times 8 + \mathbf{1} =$	1 401	Producto del resultado anterior por la base, más el cuarto dígito.
$1401 \times 8 + \mathbf{3} =$	11 211	Producto del resultado anterior por la base, más el quinto dígito.
	11 211	Valor equivalente.

Por tanto, $25713_{(8)}$ equivale a $11\,211_{(10)}$

3 Transforma $2A1F_{(16)}$ a base 10.

Solución

Al seguir los pasos se obtiene:

$2 \times 16 + \boldsymbol{A} =$ $2 \times 16 + \mathbf{10} =$	42	Producto del primer dígito por la base, más el segundo dígito.
$42 \times 16 + \mathbf{1} =$	673	Producto del resultado anterior por la base, más el tercer dígito.
$673 \times 16 + \boldsymbol{F} =$ $673 \times 16 + \mathbf{15} =$	10 783	Producto del resultado anterior por la base, más el cuarto dígito.
	10 783	Valor equivalente.

Por consiguiente, $2A1F_{(16)}$ equivale a $10\,783_{(10)}$

EJERCICIO 90

Transforma los siguientes números a forma decimal:

1. $1100_{(2)}$
2. $10111_{(2)}$
3. $11011011_{(2)}$
4. $111001.1101_{(2)}$
5. $10011.1011_{(2)}$
6. $2102_{(3)}$
7. $11120_{(3)}$
8. $100101_{(3)}$
9. $21101.201_{(3)}$
10. $2110112.212_{(3)}$
11. $3220_{(4)}$
12. $12003.223_{(4)}$
13. $3201.\ 231_{(4)}$
14. $343_{(5)}$
15. $10134_{(5)}$
16. $234_{(5)}$
17. $43210_{(5)}$
18. $3210.341_{(5)}$
19. $20014.4431_{(5)}$
20. $314.1003_{(5)}$
21. $45_{(6)}$
22. $4531_{(6)}$
23. $55.342_{(6)}$
24. $7612_{(8)}$
25. $5671_{(8)}$
26. $753.1041_{(8)}$
27. $820_{(9)}$
28. $765_{(9)}$
29. $2AD_{(16)}$
30. $AB2C_{(16)}$
31. $B3A_{(16)}$
32. $F2A.1DC_{(16)}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Conversión de un número en base 10 a otra base $N_{(10)} \longrightarrow N_{(B)}$

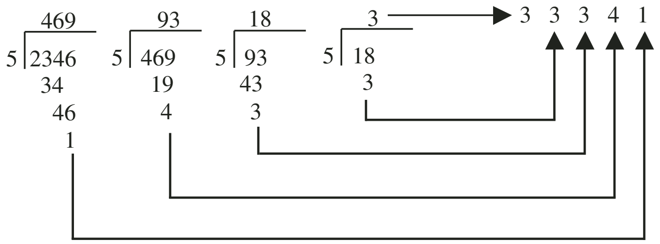
- **Método de los residuos.** Se divide el número decimal entre la base a la que se quiere convertir, el cociente se vuelve a dividir entre la base y así sucesivamente, hasta obtener un cociente menor a la base. Se toma el último cociente y cada uno de los residuos para formar el número.

EJEMPLOS

1 Cambia 2 $346_{(10)}$ a base 5.

Solución

Se divide 2 346 por 5 y con cada cociente se realiza lo mismo.

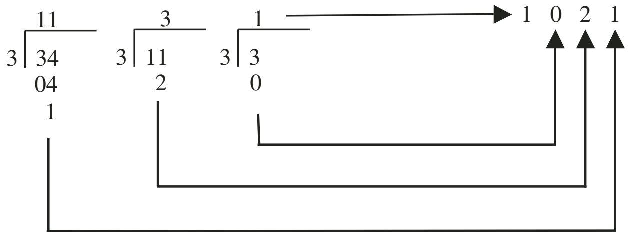


Por tanto, 2 $346_{(10)}$ equivale a $33341_{(5)}$

2 Cambia $34_{(10)}$ a base 3.

Solución

Se divide 34 entre 3 y con cada cociente se realiza lo mismo.

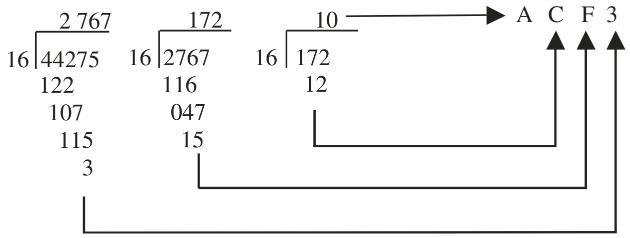


Entonces, $34_{(10)}$ equivale a $1021_{(3)}$

3 Transforma 44 $275_{(10)}$ a base 16.

Solución

Se divide 44 $275_{(10)}$ entre 16 y con cada cociente se realiza lo mismo.



Por tanto, 44 $275_{(10)}$ equivale a $ACF3_{(16)}$

Cuando un número en base 10 tiene decimales, se procede de la misma manera con la parte entera, la parte fraccionaria se multiplica por la base hasta obtener cero en la parte fraccionaria o un suficiente número de decimales.

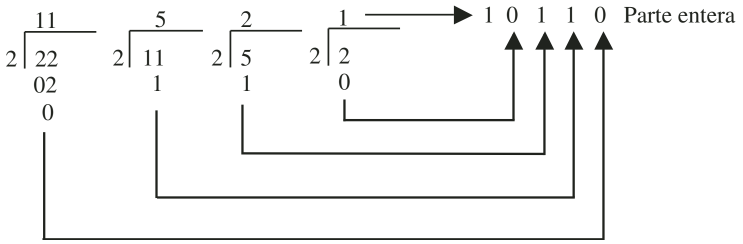
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte $22.75_{(10)}$ a binario.

Solución

Se divide $22_{(10)}$ por 2 y con cada cociente se realiza lo mismo.



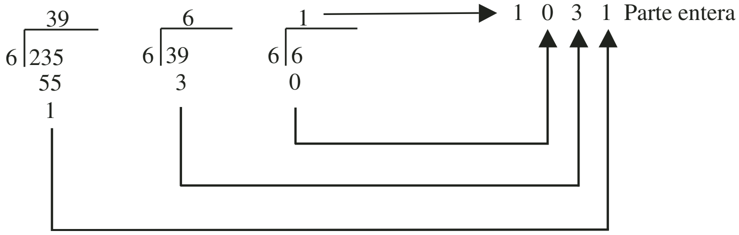
La parte decimal (0.75) se multiplica por 2, la parte fraccionaria se multiplica también por 2, así sucesivamente, hasta obtener 0 en la parte decimal, con los enteros en el orden de aparición se obtiene la parte decimal.

	1er. entero	2do. entero	Resultado
$0.75 \times 2 = 1.5$	**1**		
$0.5 \times 2 = 1.0$		**1**	
			.11

Por consiguiente, $22.75_{(10)}$ equivale a $10110.11_{(2)}$

2 Transforma $235.45_{(10)}$ a base 6.

Solución



	1er. entero	2do. entero	3er. entero	4to. entero	Resultado
$0.45 \times 6 = 2.7$	**2**				
$0.7 \times 6 = 4.2$		**4**			
$0.2 \times 6 = 1.2$			**1**		
$0.2 \times 6 = 1.2$				**1**	
					.2411…

Por tanto, $235.45_{(10)}$ equivale a $1031.24\bar{1}_{(6)}$

- **Método de extracción de potencias.** Se elabora una tabla de potencias según la base y después se busca el número de veces que cabe alguna de las potencias en el número, se resta de dicho número, y así sucesivamente hasta que la diferencia sea 0.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Cambia $925_{(10)}$ a base 4.

Solución

Se construye la tabla de potencias de 4

$4^{-2} = 0.0625$
$4^{-1} = 0.25$
$4^{0} = 1$
$4^{1} = 4$
$4^{2} = 16$
$4^{3} = 64$
$4^{4} = 256$
$4^{5} = 1024$

3 veces 4^4	768	925 – 768 = 157
2 veces 4^3	128	157 – 128 = 29
1 vez 4^2	16	29 – 16 = 13
3 veces 4^1	12	13 – 12 = 1
1 vez 4^0	1	1 – 1 = 0

Por consiguiente, $925_{(10)}$ equivale a $32131_{(4)}$

EJERCICIO 91

Convierte los siguientes números en forma decimal a la base indicada.

1. $15_{(10)}$ a base 2
2. $315_{(10)}$ a base 2
3. $13.75_{(10)}$ a base 2
4. $19.5_{(10)}$ a base 2
5. $0.625_{(10)}$ a base 2
6. $121.875_{(10)}$ a base 2
7. $10_{(10)}$ a base 3
8. $721_{(10)}$ a base 3
9. $53_{(10)}$ a base 4
10. $427_{(10)}$ a base 5
11. $37.84_{(10)}$ a base 5
12. $386.432_{(10)}$ a base 5
13. $213_{(10)}$ a base 6
14. $411_{(10)}$ a base 6
15. $97_{(10)}$ a base 7
16. $715_{(10)}$ a base 7
17. $63_{(10)}$ a base 8
18. $104_{(10)}$ a base 8
19. $350.1875_{(10)}$ a base 8
20. $28\,779.75_{(10)}$ a base 8
21. $140_{(10)}$ a base 9
22. $1\,075_{(10)}$ a base 9
23. $97021_{(10)}$ a base 9
24. $196_{(10)}$ a base 16
25. $358.0625_{(10)}$ a base 16
26. $21\,468.5_{(10)}$ a base 16

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Relación entre el sistema binario, octal y hexadecimal. La relación entre los sistemas, binario y octal es de 3, ya que $8 = 2^3$, esto quiere decir que a cada tres dígitos en el binario le corresponde un dígito del octal.

Tabla de valores equivalentes

Decimal	Binario	Octal
0	000	0
1	001	1
2	010	2
3	011	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8	1000	10

Conversión de un número binario a octal $N_{(2)} \longrightarrow N_{(8)}$

Para hacer la conversión se separan los dígitos en grupos de 3 a partir del punto decimal (hacia la izquierda en la parte entera y a la derecha en la parte decimal), y se sustituye cada grupo por su equivalente en octal.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte $11110011_{(2)}$ a base 8.

Solución

Se separan grupos de 3 dígitos de derecha a izquierda y se busca en la tabla su equivalencia en octal.

011	110	011	Binario
↓	↓	↓	↓
3	6	3	Octal

Por tanto, $1111001_{(2)} = 363_{(8)}$

2 Cambia $1101111.110100_{(2)}$ a base 8.

Solución

Se separan grupos de 3 dígitos de derecha a izquierda y se busca en la tabla su equivalencia en octal.

001	101	111	.	110	100	Binario
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1	5	7	.	6	4	Octal

Entonces, $1101111.110100_{(2)} = 157.64_{(8)}$

Conversión de un número octal a binario $N_{(8)} \longrightarrow N_{(2)}$

Para convertir se sustituye cada dígito octal por sus 3 dígitos binarios equivalentes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma $235_{(8)}$ a base 2.

Solución

Se busca la equivalencia de cada dígito en base 2

2	3	5	Octal
↓	↓	↓	↓
010	011	101	Binario

Por consiguiente, $235_{(8)} = 10011101_{(2)}$

2 Transforma $1206.135_{(8)}$ a base 2.

Solución

1	2	0	6	.	1	3	5	Octal
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
001	010	000	110	.	001	011	101	Binario

Por tanto, $1206.135_{(8)} = 1010000110.001011101_{(2)}$

La relación entre el sistema binario y el hexadecimal es de 4, ya que $16 = 2^4$ esto quiere decir que a cada 4 dígitos en el binario le corresponde un dígito en el hexadecimal.

Tabla de valores equivalentes

Decimal	Binario	Hexadecimal
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8

Decimal	Binario	Hexadecimal
9	1001	9
10	1010	*A*
11	1011	*B*
12	1100	*C*
13	1101	*D*
14	1110	*E*
15	1111	*F*
16	10000	10
17	10001	11

Conversión de un número binario a hexadecimal $N_{(2)} \longrightarrow N_{(16)}$

Para convertir se separan los dígitos en grupos de 4 a partir del punto decimal (hacia la izquierda en la parte entera y a la derecha en la parte fraccionaria), y se sustituyen por su equivalente en hexadecimal.

EJEMPLOS

1 Convierte $110111110_{(2)}$ a hexadecimal.

Solución

Se separan grupos de 4 dígitos de derecha a izquierda, si para el último grupo hacen falta dígitos se colocan ceros a la izquierda y se busca en la tabla su equivalencia en hexadecimal.

0001	1011	1110	Binario
↓	↓	↓	↓
1	*B*	*E*	Hexadecimal

Por tanto, $110111110_{(2)} = 1BE_{(16)}$

2 Cambia $11110011.011110101_{(2)}$ a base 16.

Solución

Se separan grupos de 4 dígitos de derecha a izquierda en la parte entera y en la parte decimal de izquierda a derecha, si faltan dígitos se colocan ceros a la derecha y se busca en la tabla su equivalencia en hexadecimal.

1111	0011	.	0111	1010	1000	Binario
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
F	3	.	7	*A*	8	Hexadecimal

Entonces, $11110011.011110101_{(2)} = F3.7A8_{(16)}$

Conversión de un número hexadecimal a binario $N_{(16)} \longrightarrow N_{(2)}$

Para convertir se sustituye cada dígito hexadecimal por sus respectivos 4 dígitos binarios.

EJEMPLOS

1 Transforma $821.57_{(16)}$ a binario.

Solución

Se busca la equivalencia en base 2 de cada dígito.

8	2	1	.	5	7	Hexadecimal
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1000	0010	0001	.	0101	0111	Binario

Por consiguiente, $821.57_{(16)} = 100000100001.01010111_{(2)}$

2 Transforma $A5C.D4_{(16)}$ a binario.

Solución

Se busca la equivalencia en base 2 de cada dígito.

A	5	*C*	.	*D*	4	Hexadecimal
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1010	0101	1100	.	1101	0100	Binario

Por consiguiente, $A5C.D4_{(16)} = 101001011100.11010100$

- **Método del múltiplo.** Para explicar este método, analicemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Transforma $11110101_{(2)}$ a base 8.

Solución

Se separan en grupos de 3 en 3 de derecha a izquierda.	**011**	**110**	**101**
Se dan los dígitos 1, 2, 4, de derecha a izquierda a cada grupo.	21	421	421

(continúa)

Se suman los dígitos que se encuentran en las posiciones de los unos.	2 + 1 = 3	4 + 2 = 6	4 + 1 = 5
Los resultados forman el número equivalente en base 8.	**3**	**6**	**5**

Por tanto, $11110101_{(2)} = 365_{(8)}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Cambia $534_{(8)}$ a binario.

Solución

Se colocan los dígitos que forman el número octal.	**5**	**3**	**4**
Se dan los dígitos 1, 2, 4, de derecha a izquierda a cada grupo, se busca que los dígitos al sumarlos den el dígito de la columna.	421 4 + 1 = 5	421 2 + 1 = 3	421 4 + 0 = 4
Se asigna 1 a los valores utilizados en la suma y ceros a los que no se utilizaron, y se forman grupos de 3 dígitos.	421 101	421 011	421 100
La unión de los grupos forman el equivalente a binario.	**101**	**011**	**100**

Por consiguiente, $534_{(8)} = 101011100_{(2)}$

2 Cambia $1101101010_{(2)}$ a base 16.

Solución

Se separan en grupos de 4 en 4 de derecha a izquierda.	**0011**	**0110**	**1010**
Se dan los dígitos 1, 2, 4, 8, de derecha a izquierda, a cada grupo.	8421	8421	8421
Se suman los dígitos que se encuentran en las posiciones de los unos.	2 + 1 = 3	4 + 2 = 6	8 + 2 = 10 = ***A***
Los resultados forman el número equivalente en base 16	**3**	**6**	***A***

Entonces, $1101101010_{(2)} = 36A_{(16)}$

3 Convierte $AB5_{(16)}$ a binario.

Solución

Se colocan los dígitos que forman el número octal.	***A***	***B***	**5**
Se dan los dígitos 1, 2, 4, 8, de derecha a izquierda a cada grupo, se busca que los dígitos al sumarlos den el dígito de la columna.	8421 8 + 2 = 10	8421 8 + 2 + 1 = 11	8421 4 + 1 = 5
Se asigna 1 a los valores utilizados en la suma y ceros a los que no se utilizaron, y se forman grupos de 4 dígitos.	8421 1010	8421 1011	8421 0101
La unión de los grupos forman el equivalente a binario.	**1010**	**1011**	**0101**

Por tanto, $AB5_{(16)} = 101010110101_{(2)}$

EJERCICIO 92

Cambia los siguientes números a la base indicada.

1. $1110001111_{(2)}$ a base 8
2. $11011100011_{(2)}$ a base 8
3. $111001111.110101_{(2)}$ a base 8
4. $735_{(8)}$ a base 2
5. $1463_{(8)}$ a base 2
6. $45213_{(8)}$ a base 2
7. $56.43_{(8)}$ a base 2
8. $72.16_{(8)}$ a base 2
9. $412.67_{(8)}$ a base 2
10. $6017.2004_{(8)}$ a base 2
11. $10001101000_{(2)}$ a base 16
12. $100110110001.111010100011_{(2)}$ a base 16
13. $111110111000.01100010_{(2)}$ a base 16
14. $13AC_{(16)}$ a base 2
15. $D2F.AB_{(16)}$ a base 2
16. $7E8F.C5_{(16)}$ a base 2

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma con números en base distinta de 10

En la siguiente tabla los números remarcados indican el cambio de orden.

Decimal	Binario	Base 3	Base 4	Base 5	Octal	Hexadecimal
0	0000	0	0	0	0	0
1	0001	1	1	1	1	1
2	**0010**	2	2	2	2	2
3	0011	**10**	3	3	3	3
4	**0100**	11	**10**	4	4	4
5	0101	12	11	**10**	5	5
6	0110	**20**	12	11	6	6
7	0111	21	13	12	7	7
8	**1000**	22	**20**	13	**10**	8
9	1001	**100**	21	14	11	9
10	1010	101	22	**20**	12	*A*
11	1011	102	23	21	13	*B*
12	1100	110	**30**	22	14	*C*
13	1101	111	31	23	15	*D*
14	1110	112	32	24	16	*E*
15	1111	120	33	**30**	17	*F*
16	**10000**	121	**100**	31	**20**	**10**
17	10001	122	101	32	21	11
18	10010	**200**	102	33	22	12
19	10011	201	103	34	23	13
20	10100	202	110	**40**	24	14

Para sumar 2 o más números se ubica el primer sumando en la tabla y se cuenta el número de unidades que representa el siguiente sumando, el número al cual se llega es el resultado.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de la operación $3_{(5)} + 4_{(5)}$.

Solución

En la tabla se ubica el $3_{(5)}$ y se cuentan 4 unidades.

Base 5	0	1	2	**3**	4	10	11	**12**	13

4 unidades

Después de 4 unidades se llega al número $12_{(5)}$ que es el resultado de la suma.
Por tanto, $3_{(5)} + 4_{(5)} = 12_{(5)}$

2 El resultado de $5_{(8)} + 3_{(8)}$ es:

Solución

En la tabla se ubica el $5_{(8)}$ y se cuentan 3 unidades.

Base 8	0	1	2	3	4	**5**	6	7	**10**

3 unidades

Entonces, $5_{(8)} + 3_{(8)} = 10_{(8)}$

3 El resultado de $8_{(16)} + 5_{(16)}$ es:

Solución

En la tabla se ubica el $8_{(16)}$ y se cuentan 5 unidades

Base 16	...	6	7	**8**	9	*A*	*B*	*C*	***D***

5 unidades

Por consiguiente, $8_{(16)} + 5_{(16)} = D_{(16)}$

4 El resultado de $3_{(5)} + 2_{(5)} + 1_{(5)}$ es:

Solución

En la tabla se ubica el $3_{(5)}$ y se cuentan 2 unidades.

Base 5	0	1	2	**3**	4	**10**	11	12	13

2 unidades

A partir del $10_{(5)}$ se cuenta una unidad.

Base 5	0	1	2	3	4	**10**	**11**	12	13

una unidad

Por tanto, $3_{(5)} + 2_{(5)} + 1_{(5)} = 11_{(5)}$

Para sumar números de 2 o más dígitos se procede de la misma forma que en el sistema decimal, se toma en cuenta el cambio de orden para contar las unidades que se acarrean.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve $234_{(5)} + 3_{(5)}$.

Solución

Se colocan los sumandos en forma vertical.

$234_{(5)}$ $+ \quad 3_{(5)}$ $2_{(5)}$	$4_{(5)} + 3_{(5)} = 12_{(5)}$	Se pone 2 y se acarrea **1**
1 $234_{(5)}$ $+ \quad 3_{(5)}$ 242	$3_{(5)} + 1_{(5)} = 4_{(5)}$	Se pone 4 y se baja el 2

Por tanto, $234_{(5)} + 3_{(5)} = 242_{(5)}$

2 Resuelve $101_{(2)} + 11_{(2)}$.

Solución

Se colocan los sumandos en forma vertical.

$101_{(2)}$ $+ \quad 11_{(2)}$ 0	$1_{(2)} + 1_{(2)} = 10_{(2)}$	Se pone 0 y se acarrea **1**
1 $101_{(2)}$ $+ \quad 11_{(2)}$ 00	$\mathbf{1}_{(2)} + 0_{(2)} + 1_{(2)} = 10_{(2)}$	Se pone 0 y se acarrea **1**
11 $101_{(2)}$ $+ \quad 11_{(2)}$ $1000_{(2)}$	$\mathbf{1}_{(2)} + 1_{(2)} = 10_{(2)}$	Se pone 10

Por consiguiente, $101_{(2)} + 11_{(2)} = 1000_{(2)}$

3 Resuelve $234_{(5)} + 421_{(5)}$.

Solución

Se colocan los sumandos en forma vertical.

$\begin{array}{r} \mathbf{1} \\ 234_{(5)} \\ +\ 421_{(5)} \\ \hline 0 \end{array}$	$4_{(5)} + 1_{(5)} = 10_{(5)}$	Se pone 0 y se acarrea **1**
$\begin{array}{r} \mathbf{1} \\ 234_{(5)} \\ +\ 421_{(5)} \\ \hline 10 \end{array}$	$3_{(5)} + 2_{(5)} = 10_{(5)}$ $10_{(5)} + \mathbf{1}_{(5)} = 11_{(5)}$	Se pone 1 y se acarrea **1**
$\begin{array}{r} \mathbf{1} \\ 234_{(5)} \\ +\ 421_{(5)} \\ \hline 1210_{(5)} \end{array}$	$2_{(5)} + 4_{(5)} = 11_{(5)}$ $11_{(5)} + \mathbf{1}_{(5)} = 12_{(5)}$	Se pone 12

Por tanto, $234_{(5)} + 421_{(5)} = 1210_{(5)}$

4 Resuelve $537_{(8)} + 45_{(8)}$.

Solución

Se colocan los sumandos en forma vertical.

$\begin{array}{r} 537_{(8)} \\ +\ 45_{(8)} \\ \hline 4 \end{array}$	$7_{(8)} + 5_{(8)} = 14_{(8)}$	Se pone 4 y se acarrea **1**
$\begin{array}{r} \mathbf{1} \\ 537_{(8)} \\ +\ 45_{(8)} \\ \hline 04 \end{array}$	$3_{(8)} + 4_{(8)} = 7_{(8)}$ $7_{(8)} + \mathbf{1}_{(8)} = 10_{(8)}$	Se pone 0 y se acarrea **1**
$\begin{array}{r} \mathbf{11} \\ 537_{(8)} \\ +\ 45_{(8)} \\ \hline 604_{(8)} \end{array}$	$5_{(8)} + \mathbf{1}_{(8)} = 6_{(8)}$	Se pone 6

Por consiguiente, $537_{(8)} + 45_{(8)} = 604_{(8)}$

5 Determina la suma de: $3AC_{(16)} + 236_{(16)}$

Solución

Se colocan los sumandos en forma vertical.

$3AC_{(16)}$ $+\ 236_{(16)}$ $2_{(16)}$	$C_{(16)} + 6_{(16)} = 12_{(16)}$	Se pone 2 y se acarrea **1**
1 $3AC_{(16)}$ $+\ 236_{(16)}$ $E2$	$A_{(16)} + 3_{(16)} = D_{(16)}$ $D_{(16)} + \mathbf{1}_{(16)} = E_{(16)}$	Se pone E
$3AC_{(16)}$ $+\ 236_{(16)}$ $5E2_{(16)}$	$3_{(16)} + 2_{(16)} = 5_{(16)}$	Se pone 5

Entonces, $3AC_{(16)} + 236_{(16)} = 5E2_{(16)}$

6 Calcula la suma de: $4762_{(8)} + 1304_{(8)} + 546_{(8)}$

Solución

Se colocan los sumandos en forma vertical.

$4762_{(8)}$ $1304_{(8)}$ $+\ 546_{(8)}$ 4	$2_{(8)} + 4_{(8)} + 6_{(8)} = 14_{(8)}$	Se pone 4 y se acarrea **1**
1 $4762_{(8)}$ $1304_{(8)}$ $+\ 546_{(8)}$ 34	$1_{(8)} + 6_{(8)} + 0_{(8)} + 4_{(8)} = 13_{(8)}$	Se pone 3 y se acarrea **1**
11 $4762_{(8)}$ $1304_{(8)}$ $+\ 546_{(8)}$ 034	$1_{(8)} + 7_{(8)} + 3_{(8)} + 5_{(8)} = 20_{(8)}$	Se pone 0 y se acarrea **2**
211 $4762_{(8)}$ $1304_{(8)}$ $+\ 546_{(8)}$ $7034_{(8)}$	$\mathbf{2}_{(8)} + 4_{(8)} + 1_{(8)} = 7_{(8)}$	Se pone 7

Entonces, $4762_{(8)} + 1304_{(8)} + 546_{(8)} = 7034_{(8)}$

EJERCICIO 93

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $\begin{array}{r} 10111_{(2)} \\ +\;11100_{(2)} \\ 11001_{(2)} \\ \hline \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 11011101_{(2)} \\ +\quad 11011_{(2)} \\ 1111101_{(2)} \\ \hline \end{array}$

3. $\begin{array}{r} 1011111_{(2)} \\ +\quad 10011_{(2)} \\ 1101101_{(2)} \\ \hline \end{array}$

4. $\begin{array}{r} 11011111_{(2)} \\ +\;1000111_{(2)} \\ 1110111_{(2)} \\ 11101_{(2)} \\ \hline \end{array}$

5. $\begin{array}{r} 1022_{(3)} \\ +\;2012_{(3)} \\ 211_{(3)} \\ \hline \end{array}$

6. $\begin{array}{r} 21022_{(3)} \\ +\;2202_{(3)} \\ 211_{(3)} \\ \hline \end{array}$

7. $\begin{array}{r} 221122_{(3)} \\ +\;12010_{(3)} \\ 1212_{(3)} \\ \hline \end{array}$

8. $\begin{array}{r} 22011022_{(3)} \\ +\;112012_{(3)} \\ 200211_{(3)} \\ \hline \end{array}$

9. $\begin{array}{r} 33213_{(4)} \\ +\;23012_{(4)} \\ 321_{(4)} \\ \hline \end{array}$

10. $\begin{array}{r} 33213_{(4)} \\ +\quad 312_{(4)} \\ 101_{(4)} \\ \hline \end{array}$

11. $\begin{array}{r} 223013213_{(4)} \\ +\quad 1023012_{(4)} \\ 31322_{(4)} \\ \hline \end{array}$

12. $\begin{array}{r} 2133213_{(4)} \\ +\quad 23322_{(4)} \\ 30321_{(4)} \\ \hline \end{array}$

13. $\begin{array}{r} 432_{(5)} \\ +\;301_{(5)} \\ 111_{(5)} \\ \hline \end{array}$

14. $\begin{array}{r} 1432_{(5)} \\ +\;2312_{(5)} \\ 31_{(5)} \\ \hline \end{array}$

15. $\begin{array}{r} 21402_{(5)} \\ +\;4302_{(5)} \\ 1011_{(5)} \\ \hline \end{array}$

16. $\begin{array}{r} 412342_{(5)} \\ +\;30122_{(5)} \\ 1133_{(5)} \\ \hline \end{array}$

17. $\begin{array}{r} 60704_{(8)} \\ +\;5077_{(8)} \\ 222_{(8)} \\ \hline \end{array}$

18. $\begin{array}{r} 74532_{(8)} \\ +\;64301_{(8)} \\ 52413_{(8)} \\ \hline \end{array}$

19. $\begin{array}{r} 56721_{(8)} \\ +\quad 4576_{(8)} \\ 756421_{(8)} \\ \hline \end{array}$

20. $\begin{array}{r} 463721_{(8)} \\ +\;75624_{(8)} \\ 421756_{(8)} \\ \hline \end{array}$

21. $\begin{array}{r} 472_{(16)} \\ +\;591_{(16)} \\ 65_{(16)} \\ \hline \end{array}$

22. $\begin{array}{r} 512_{(16)} \\ +\;AC1_{(16)} \\ 4F_{(16)} \\ \hline \end{array}$

23. $\begin{array}{r} 1576_{(16)} \\ +\;A9F1_{(16)} \\ 54CF_{(16)} \\ \hline \end{array}$

24. $\begin{array}{r} A4FB2_{(16)} \\ +\;131BC_{(16)} \\ 150F9_{(16)} \\ \hline \end{array}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Resta con números en base distinta de 10

En la resta se recomienda usar la tabla de equivalencias y se procede a resolver como una resta en base 10.

EJEMPLOS

Ejemplos

1. Determina el resultado de la operación $24_{(5)} - 14_{(5)}$.

Solución

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $14_{(5)}$ a $24_{(5)}$

Base 5	...	13	**14**	20	21	22	23	**24**	30

5 unidades (de 14 a 24)

Por tanto, $24_{(5)} - 14_{(5)} = 10_{(5)}$

2 Encuentra el resultado de la operación $7_{(8)} - 3_{(8)}$.

Solución

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $3_{(8)}$ a $7_{(8)}$

Base 8	0	1	2	**3**	4	5	6	**7**	10

4 unidades

Por tanto, $7_{(8)} - 3_{(8)} = 4_{(8)}$

3 El resultado de $F_{(16)} - 8_{(16)}$ es:

Solución

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $8_{(16)}$ a $F_{(16)}$

Base 16	...	**8**	9	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	***F***

7 unidades

Por consiguiente, $F_{(16)} - 8_{(16)} = 7_{(16)}$

Para restar números de 2 o más dígitos se colocan las cantidades en forma vertical y se procede como en la resta en base 10.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 El valor de la diferencia $44301_{(5)} - 21413_{(5)}$ es:

Solución

Se colocan los números en forma vertical.

$$\begin{array}{r} 44301_{(5)} \\ - \ 21413_{(5)} \\ \hline \end{array}$$

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $3_{(5)}$ a $11_{(5)}$

Base 5	0	1	2	**3**	4	10	**11**	12	13

3 unidades

$\begin{array}{r} \mathbf{1} \\ 44301_{(5)} \\ - \ 21413_{(5)} \\ \hline 3 \end{array}$	Se pone 3 y se acarrea **1** Se suma $1_{(5)} + \mathbf{1}_{(5)} = 2_{(5)}$

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $2_{(5)}$ a $10_{(5)}$

Base 5	0	1	**2**	3	4	**10**	11	12	13

3 unidades

$\begin{array}{r} \mathbf{1} \\ 44301_{(5)} \\ -\ 21413_{(5)} \\ \hline 33 \end{array}$	Se pone 3 y se acarrea **1** Se suma $\mathbf{1}_{(5)} + 4_{(5)} = 10_{(5)}$

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $10_{(5)}$ a $13_{(5)}$

Base 5	0	1	2	3	4	**10**	11	12	**13**

3 unidades

$\begin{array}{r} \mathbf{1} \\ 44301_{(5)} \\ -\ 21413_{(5)} \\ \hline 333 \end{array}$	Se pone 3 y se acarrea **1** Se suma $\mathbf{1}_{(5)} + 1_{(5)} = 2_{(5)}$

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $2_{(5)}$ a $4_{(5)}$

Base 5	0	1	**2**	3	**4**	10	11	12	13

2 unidades

$\begin{array}{r} 44301_{(5)} \\ -\ 21413_{(5)} \\ \hline 2333 \end{array}$	Se pone 2

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $2_{(5)}$ a $4_{(5)}$

Base 5	0	1	**2**	3	**4**	10	11	12	13

2 unidades

$\begin{array}{r} 44301_{(5)} \\ -\ 21413_{(5)} \\ \hline 22333_{(5)} \end{array}$	Se pone 2

Por tanto, $44301_{(5)} - 21413_{(5)} = 22333_{(5)}$

2 ¿Cuál es la diferencia de: $DE2_{(16)} - A25_{(16)}$?

Solución

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $5_{(16)}$ a $12_{(16)}$

Base 16	...	4	**5**	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	**12**	13	14

13 unidades

(continúa)

(*continuación*)

$\begin{array}{r} \mathbf{1} \\ DE2_{(16)} \\ -\ A25_{(16)} \\ \hline D \end{array}$	Se pone $D = 13_{(16)}$ y se acarrea **1** Se suma $\mathbf{1}_{(16)} + 2_{(16)} = 3_{(16)}$

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $3_{(16)}$ a $E_{(16)}$

Base 16	...	**3**	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	**E**	F	10	11	12	13

11 unidades

$\begin{array}{r} DE2_{(16)} \\ -\ A25_{(16)} \\ \hline BD \end{array}$	Se pone $B = 11_{(16)}$

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $A_{(16)}$ a $D_{(16)}$

Base 16	...	3	4	5	6	7	8	9	**A**	B	C	**D**	E	F	10	11	12	13

3 unidades

$\begin{array}{r} DE2_{(16)} \\ -\ A25_{(16)} \\ \hline 3BD_{(16)} \end{array}$	Se pone 3

Por consiguiente, $DE2_{(16)} - A25_{(16)} = 3BD_{(16)}$

EJERCICIO 94

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $\begin{array}{r} 111000_{(2)} \\ -\ 10101_{(2)} \\ \hline \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 110111011_{(2)} \\ -\ 110001_{(2)} \\ \hline \end{array}$

3. $\begin{array}{r} 11011101_{(2)} \\ -\ 1111011_{(2)} \\ \hline \end{array}$

4. $\begin{array}{r} 34213_{(5)} \\ -\ 4432_{(5)} \\ \hline \end{array}$

5. $\begin{array}{r} 420444_{(5)} \\ -\ 4433_{(5)} \\ \hline \end{array}$

6. $\begin{array}{r} 5436_{(8)} \\ -\ 333_{(8)} \\ \hline \end{array}$

7. $\begin{array}{r} 75451_{(8)} \\ -\ 57627_{(8)} \\ \hline \end{array}$

8. $\begin{array}{r} 769_{(16)} \\ -\ 3AB_{(16)} \\ \hline \end{array}$

9. $\begin{array}{r} 3ABC_{(16)} \\ -\ 2AB_{(16)} \\ \hline \end{array}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación con números en base distinta de 10

Así como el sistema decimal tiene sus tablas de multiplicar, a cada sistema se le puede construir su tabla.

Base 2 (Binario)

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Base 3 (Ternario)

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Base 4 (Cuaternario)

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

Base 5 (Quinario)

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Base 8 (Octal)

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Base 16 (Hexadecimal)

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
2	0	2	4	6	8	*A*	*C*	*E*	10	12	14	16	18	1*A*	1*C*	1*E*
3	0	3	6	9	*C*	*F*	12	15	18	1*B*	1*E*	21	24	27	2*A*	2*D*
4	0	4	8	*C*	10	14	18	1*C*	20	24	28	2*C*	30	34	38	3*C*
5	0	5	*A*	*F*	14	19	1*E*	23	28	2*D*	32	37	3*C*	41	46	4*B*
6	0	6	*C*	12	18	1*E*	24	2*A*	30	36	3*C*	42	48	4*E*	54	5*A*
7	0	7	*E*	15	1*C*	23	2*A*	31	38	3*F*	46	4*D*	54	5*B*	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1*B*	24	2*D*	36	3*F*	48	51	5*A*	63	6*C*	75	7*E*	87
A	0	*A*	14	1*E*	28	32	3*C*	46	50	5*A*	64	6*E*	78	82	8*C*	96
B	0	*B*	16	21	2*C*	37	42	4*D*	58	63	6*E*	79	84	8*F*	9*A*	*A*5
C	0	*C*	18	24	30	3*C*	48	54	60	6*C*	78	84	90	9*C*	*A*8	*B*4
D	0	*D*	1*A*	27	34	41	4*E*	5*B*	68	75	82	8*F*	9*C*	*A*9	*B*6	*C*3
E	0	*E*	1*C*	2*A*	38	46	54	62	70	7*E*	8*C*	9*A*	*A*8	*B*6	*C*4	*D*2
F	0	*F*	1*E*	2*D*	3*C*	4*B*	5*A*	69	78	87	96	*A*5	*B*4	*C*3	*D*2	*E*1

Para multiplicar números de 2 o más dígitos se procede de igual forma que en el sistema decimal se toma en cuenta la tabla correspondiente a la base.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $12_{(3)} \times 2_{(3)}$.

Solución

Se colocan los factores en forma vertical.

$$\begin{array}{r} 12_{(3)} \\ \times \quad 2_{(3)} \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{r} 12_{(3)} \\ \times \quad 2_{(3)} \\ \hline 1 \end{array}$	$2_{(3)} \times 2_{(3)} = 11_{(3)}$	Se pone 1 y se acarrea **1**
$\begin{array}{r} 12_{(3)} \\ \times \quad 2_{(3)} \\ \hline 101_{(3)} \end{array}$	$2_{(3)} \times 1_{(3)} = 2_{(3)}$ $2_{(3)} + \mathbf{1}_{(3)} = 10_{(3)}$	Se pone 10

Por tanto, $12_{(3)} \times 2_{(3)} = 101_{(3)}$

2 Encuentra el resultado de $1234_{(5)} \times 3_{(5)}$.

Solución

Se colocan los factores en forma vertical.

$$\begin{array}{r} 1234_{(5)} \\ \times \quad 3_{(5)} \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{r} 1234_{(5)} \\ \times \quad 3_{(5)} \\ \hline 2 \end{array}$	$3_{(5)} \times 4_{(5)} = 22_{(5)}$	Se pone 2 y se acarrea **2**
$\begin{array}{r} 1234_{(5)} \\ \times \quad 3_{(5)} \\ \hline 12 \end{array}$	$3_{(5)} \times 3_{(5)} = 14_{(5)}$ $14_{(5)} + \mathbf{2}_{(5)} = 21_{(5)}$	Se pone 1 y se acarrea **2**
$\begin{array}{r} 1234_{(5)} \\ \times \quad 3_{(5)} \\ \hline 312_{(5)} \end{array}$	$3_{(5)} \times 2_{(5)} = 11_{(5)}$ $11_{(5)} + \mathbf{2}_{(5)} = 13_{(5)}$	Se pone 3 y se acarrea **1**
$\begin{array}{r} 1234_{(5)} \\ \times \quad 3_{(5)} \\ \hline 4312_{(5)} \end{array}$	$3_{(5)} \times 1_{(5)} = 3_{(5)}$ $3_{(5)} + \mathbf{1}_{(5)} = 4_{(5)}$	Se pone 4

Por tanto, $1234_{(5)} \times 3_{(5)} = 4312_{(5)}$

3 El resultado de $324_{(16)} \times 5_{(16)}$ es:

Solución

Se colocan los factores en forma vertical.

$$\begin{array}{r} 324_{(16)} \\ \times \quad 5_{(16)} \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{r} 324_{(16)} \\ \times \quad 5_{(16)} \\ \hline 4 \end{array}$	$5_{(16)} \times 4_{(16)} = 14_{(16)}$	Se pone 4 y se acarrea **1**
$\begin{array}{r} 324_{(16)} \\ \times \quad 5_{(16)} \\ \hline B4 \end{array}$	$5_{(16)} \times 2_{(16)} = A_{(16)}$ $A_{(16)} + 1_{(16)} = B_{(16)}$	Se pone *B*
$\begin{array}{r} 324_{(16)} \\ \times \quad 5_{(16)} \\ \hline FB4_{(16)} \end{array}$	$5_{(16)} \times 3_{(16)} = F_{(16)}$	Se pone *F*

Por tanto, $324_{(16)} \times 5_{(16)} = FB4_{(16)}$

4 Resuelve $527_{(8)} \times 423_{(8)}$.

Solución

Se multiplica del mismo modo que en el sistema decimal, sólo que con la tabla de multiplicar del sistema octal.

$$\begin{array}{r} 527_{(8)} \\ \times\, 423_{(8)} \\ \hline 2005 \\ 1256 \\ 2534 \\ \hline 270165_{(8)} \end{array}$$

Por consiguiente, $527_{(8)} \times 423_{(8)} = 270165_{(8)}$

5 Realiza el producto de: $3AC_{(16)} \times B2_{(16)}$.

Solución

$$\begin{array}{r} 3AC_{(16)} \\ B2_{(16)} \\ \hline 758 \\ 2864 \\ \hline 28D98_{(16)} \end{array}$$

Finalmente, $3AC_{(16)} \times B2_{(16)} = 28D98_{(16)}$

EJERCICIO 95

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $11011_{(2)} \times 111_{(2)}$

2. $110101_{(2)} \times 101_{(2)}$

3. $2112_{(3)} \times 21_{(3)}$

4. $23013_{(4)} \times 302_{(4)}$

5. $23012_{(4)} \times 321_{(4)}$

6. $2301_{(5)} \times 344_{(5)}$

7. $5401_{(8)} \times 543_{(8)}$

8. $5641_{(8)} \times 546_{(8)}$

9. $67124_{(8)} \times 315_{(8)}$

10. $1047_{(8)} \times 7601_{(8)}$

11. $A4C_{(16)} \times 2B_{(16)}$

12. $AB2_{(16)} \times 3A_{(16)}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División con números en base distinta de 10

Se utilizan las tablas de multiplicar y se procede de la misma forma que en el sistema decimal.

EJEMPLOS

1 Resuelve $312_{(4)} \div 2_{(4)}$.

Solución

Cociente: 1; $2_{(4)} \overline{)312_{(4)}}$; −2; 11	$2_{(4)} \times 1_{(4)} = 2_{(4)}$ Se resta de la primera cifra del dividendo y se baja la siguiente cifra
Cociente: 12; $2_{(4)} \overline{)312_{(4)}}$; −2; 11; −10; 012	$2_{(4)} \times 2_{(4)} = 10_{(4)}$ Se resta de $11_{(4)}$ y se baja la siguiente cifra
Cociente: 123; $2_{(4)} \overline{)312_{(4)}}$; −2; 11; −10; 012; −12; 0	$2_{(4)} \times 3_{(4)} = 12_{(4)}$ Se resta de $12_{(4)}$

Entonces, $312_{(4)} \div 2_{(4)} = 123_{(4)}$

2 Resuelve $421_{(5)} \div 3_{(5)}$.

Solución

$\begin{array}{r\|l} & 1 \\ \hline 3_{(5)} & 421_{(5)} \\ & -3 \\ \hline & 12 \end{array}$	$3_{(5)} \times 1_{(5)} = 3_{(5)}$ Se resta de la primera cifra del dividendo y se baja la siguiente cifra
$\begin{array}{r\|l} & 12 \\ \hline 3_{(5)} & 421_{(5)} \\ & -3 \\ \hline & 12 \\ & -11 \\ \hline & 011 \end{array}$	$2_{(5)} \times 3_{(5)} = 11_{(5)}$ Se resta de $12_{(5)}$ y se baja la siguiente cifra
$\begin{array}{r\|l} & 122 \\ \hline 3_{(5)} & 421_{(5)} \\ & -3 \\ \hline & 12 \\ & -11 \\ \hline & 011 \\ & -11 \\ \hline & 0 \end{array}$	$2_{(5)} \times 3_{(5)} = 11_{(5)}$ Se resta de $11_{(5)}$

Entonces, $421_{(5)} \div 3_{(5)} = 122_{(5)}$.

3 Resuelve $5272_{(8)} \div 24_{(8)}$

Solución

$$\begin{array}{r|l} & 211 \\ \hline 24_{(8)} & 5272_{(8)} \\ & -50 \\ \hline & \ \ 27 \\ & -24 \\ \hline & \ \ \ \ 32 \\ & \ \ -24 \\ \hline & \ \ \ \ 06 \end{array}$$

Por tanto, $5272_{(8)} \div 24_{(8)} = 211_{(8)}$ y el residuo es $6_{(8)}$

4 Resuelve $4D0D_{(16)} \div 19_{(16)}$.

Solución

$$\begin{array}{r|l} & 315 \\ \hline 19_{(16)} & 4D0D_{(16)} \\ & -4B \\ \hline & 020 \\ & -19 \\ \hline & \ \ 07D \\ & \ \ -7D \\ \hline & \ \ \ \ 0 \end{array}$$

Por tanto, $4D0D_{(16)} \div 19_{(16)} = 315_{(16)}$

EJERCICIO 96

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $10_{(2)}\overline{)1100_{(2)}}$
2. $11_{(2)}\overline{)100111_{(2)}}$
3. $101_{(2)}\overline{)100100111_{(2)}}$
4. $10_{(3)}\overline{)2110_{(3)}}$
5. $21_{(3)}\overline{)102221_{(3)}}$
6. $23_{(4)}\overline{)20123_{(4)}}$
7. $31_{(4)}\overline{)322322_{(4)}}$
8. $23_{(5)}\overline{)21233_{(5)}}$
9. $43_{(5)}\overline{)1104240_{(5)}}$
10. $6_{(8)}\overline{)56026_{(8)}}$
11. $32_{(8)}\overline{)6666_{(8)}}$
12. $37_{(8)}\overline{)7345_{(8)}}$
13. $11_{(16)}\overline{)154_{(16)}}$
14. $23_{(16)}\overline{)B36_{(16)}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sistemas antiguos de numeración

Hemos visto los sistemas de numeración que más se utilizan en la actualidad; sin embargo, la necesidad que el hombre ha tenido de contar desde que existe, lo llevó a inventar otros sistemas, los cuales en su mayoría ya no se utilizan.

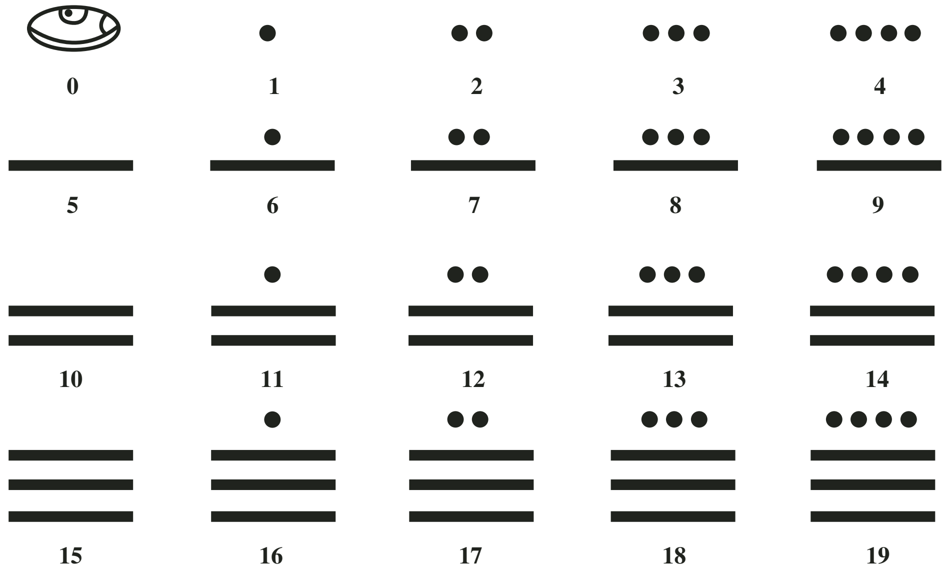
Sistema de numeración maya

Sistema posicional en el que se utiliza el principio aditivo, tiene agrupamientos de 20 en 20 (vigesimal), utiliza el cero y se considera muy avanzado para su época.

Simbología

= cero ● **= uno** ▬▬▬ **= Cinco**

Los números del 0 al 19 se representan de la siguiente manera:



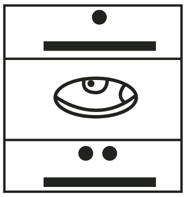
Para representar números mayores que 20 se utilizan bloques acomodados verticalmente, de tal forma que las cantidades en cada bloque se multiplican por potencias de 20, es decir, el primer bloque por $20^0 = 1$, el segundo bloque por $20^1 = 20$, el tercer bloque por $20^2 = 400$, etcétera.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma a número decimal, el siguiente arreglo de bloques:

Bloque 3
Bloque 2
Bloque 1



$6 \times 400 = 2\,400$

$0 \times 20 = 0$

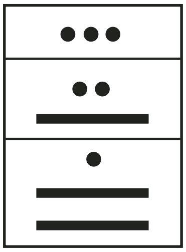
$7 \times 1 = 7$

$$\begin{array}{r} 2\,400 \\ +\quad 0 \\ 7 \\ \hline 2\,407 \end{array}$$

Por tanto, el resultado es 2 407

2 ¿Qué número decimal representa el siguiente arreglo de bloques?

Bloque 3
Bloque 2
Bloque 1



$3 \times 400 = 1\,200$

$7 \times 20 = 140$

$11 \times 1 = 11$

$$\begin{array}{r} 1\,200 \\ +\quad 140 \\ 11 \\ \hline 1\,351 \end{array}$$

Finalmente, el resultado es 1 351

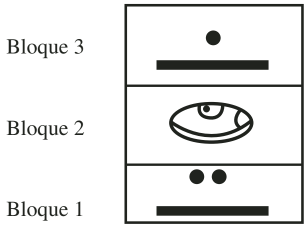
El sistema de numeración maya tiene una relación astronómica, que tomaba como unidad más simple un día (kin), 20 kines formaban un uinal (mes), 18 uinales formaban un tun (360 días = 1 año), 20 tunes un katún, un ciclo 144 000 días y 20 ciclos formaban un gran ciclo (2 880 000 días).

Lo anterior indica que cada bloque se tenía que multiplicar por 1, 20, 360, 7 200,… respectivamente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma a número decimal el siguiente arreglo de bloques:



$6 \times 360 = 2\,160$

$0 \times 20 = 0$

$7 \times 1 = 7$

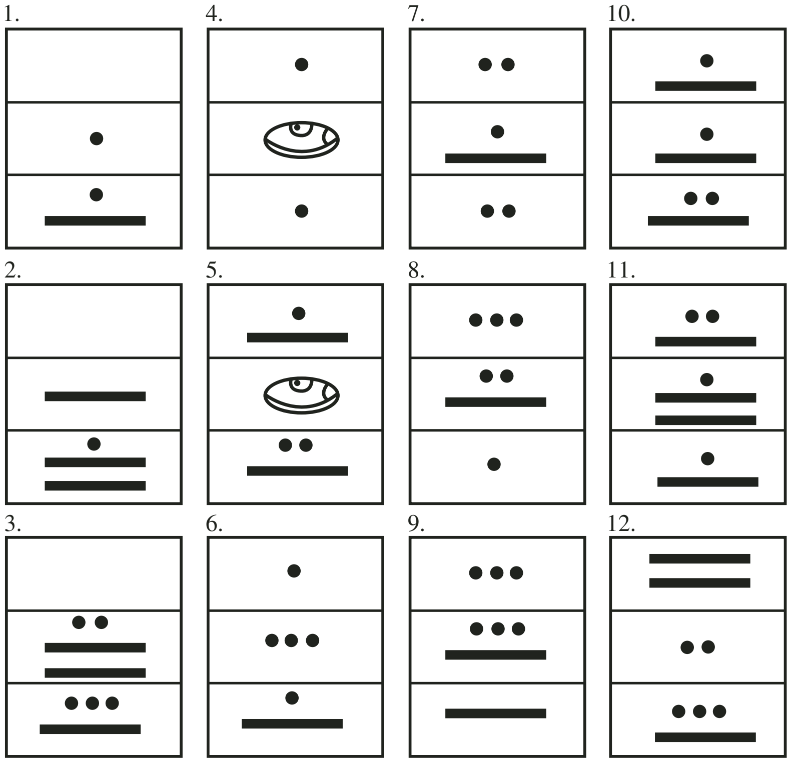
$$\begin{array}{r} 2\,160 \\ +\quad 0 \\ 7 \\ \hline 2\,167 \end{array}$$

Por tanto, el resultado es 2 172

Sin embargo, para efectos prácticos, se multiplica por potencias de 20, es decir, $20^0 = 1$, $20^1 = 20$, $20^2 = 400$, $20^3 = 8\,000$, etcétera.

EJERCICIO 97

Transforma los siguientes números mayas a numeración decimal, emplea potencias de 20:



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ejemplo

Convierte 3 528 a número maya.

Solución

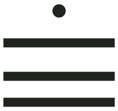
Bloque 3: se obtiene al dividir 3 528 entre 400 y el cociente se transforma a número maya.

$$400 \overline{)3\,528} \quad \text{cociente } 8, \quad \text{residuo } 328$$

8 =

Bloque 2: el residuo 328 se divide entre 20 y el cociente se transforma a número maya.

$$20 \overline{)328} \quad \text{cociente } 16; \quad 128, \quad \text{residuo } 8$$

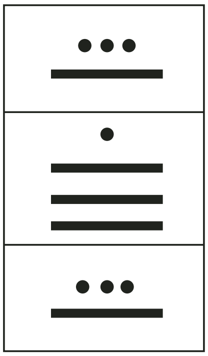
16 = 

Bloque 1: el residuo 8 se transforma a número maya.

8 =

El resultado final se obtiene al acomodar los bloques

3 528 = Bloque 3, Bloque 2, Bloque 1



EJERCICIO 98

Transforma los siguientes a numeración maya, emplea potencias de 20:

1. 25
2. 146
3. 200
4. 223
5. 467
6. 540
7. 727
8. 1 492
9. 2 006
10. 6 857
11. 9 435
12. 12 007

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

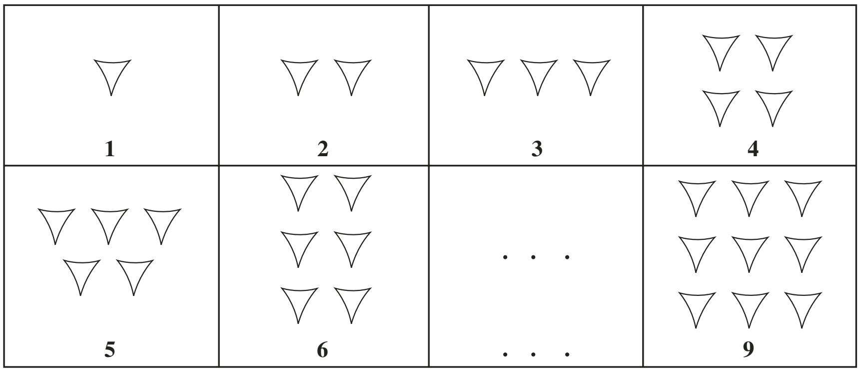
Sistema de numeración babilónico

Es un sistema aditivo en base 10 hasta el 60 y posicional con base 60 para cantidades superiores. Sus símbolos se llaman cuñas.

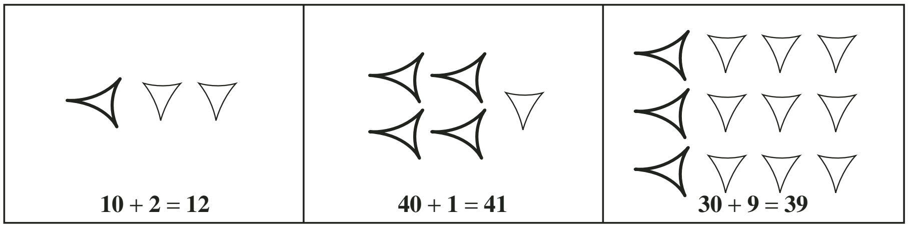
Simbología

= 1 **= 10**

Como el sistema era aditivo se podían formar los números del 1 al 9



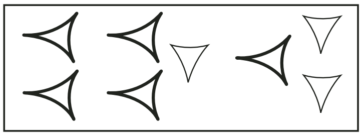
Para números mayores de 10



A partir de 60 se utilizaba el sistema posicional, en donde cada grupo de signos representaba el número de unidades.

EJEMPLOS

1 Transforma el siguiente bloque a número decimal.

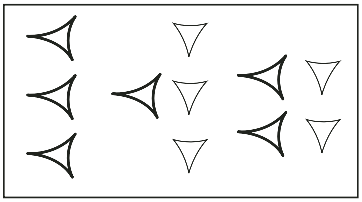


(20 × 3 600) + (21 × 60) + (12)

$$\begin{array}{r} 72\ 000 \\ +\quad 1\ 260 \\ 12 \\ \hline 73\ 272 \end{array}$$

Por tanto, el número que representa al bloque es 73 272

2 Transforma el siguiente bloque a número decimal.



$(30 \times 3\,600) + (13 \times 60) + (22)$

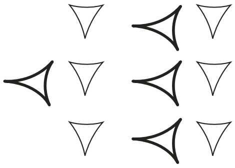
$$\begin{array}{r} 108\,000 \\ +\quad 780 \\ 22 \\ \hline 108\,802 \end{array}$$

Por consiguiente, el número que representa al bloque es 108 802

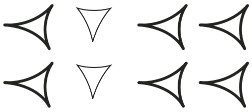
EJERCICIO **99**

Convierte a numeración decimal.

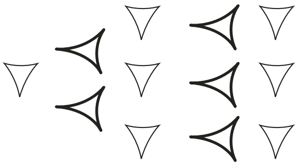
1.



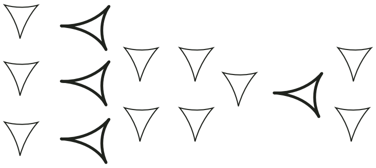
2.



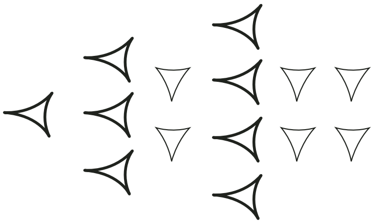
3.



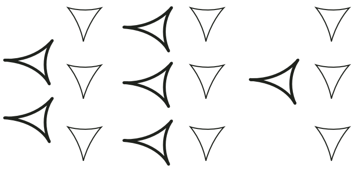
4.



5.



6.



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa el número 134 en numeración babilónica.

Solución

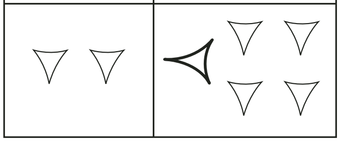
Se divide 134 por 60

$$60\,\overline{)\,134}\quad \text{cociente } 2,\ \text{residuo } 14$$

El número 134 = 60 × **2** + **14**

Con el cociente y el último residuo se forma el bloque de símbolos.

2	14



2 Representa el número 4 532 en numeración babilónica.

Solución

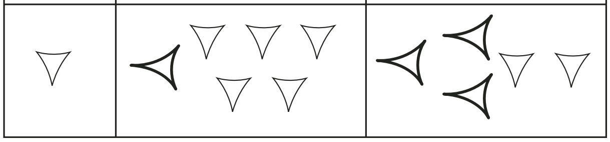
Se divide 4 532 por 3 600, el residuo se divide por 60

$$3\,600\,\overline{)\,4\,532}\quad \text{cociente } 1,\ \text{residuo } 932 \qquad 60\,\overline{)\,932}\quad \text{cociente } 15,\ 332,\ \text{residuo } 32$$

El número 4 532 = 3 600 × **1** + 60 × **15** + **32**

Con los cocientes y el último residuo se forma el bloque de símbolos.

1	15	32



EJERCICIO 100

Convierte a numeración babilónica.

1. 5
2. 15
3. 80
4. 125
5. 890
6. 2 006
7. 7 981
8. 40 815
9. 44 102
10. 73 874

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sistema de numeración romano

Sistema que se basa en 3 principios: aditivo, sustractivo y multiplicativo.

- **Simbología**

I	***V***	***X***	***L***	***C***	***D***	***M***
1	**5**	**10**	**50**	**100**	**500**	**1 000**

- **Principio aditivo.** Si se tienen 2 símbolos distintos y el de menor valor está a la derecha, entonces se suman.

Ejemplos

$$VI = 5 + 1 = 6$$

$$XII = 10 + 2 = 12$$

$$CL = 100 + 50 = 150$$

- **Principio sustractivo.** Si se tienen 2 símbolos distintos y el de mayor valor está a la derecha, entonces se resta.

Ejemplos

$IV = 5 - 1 = 4$ $\quad$ $XL = 50 - 10 = 40$ $\quad$ $CM = 1\,000 - 100 = 900$

Los símbolos ***I***, ***X***, ***C***, sólo se pueden restar una vez.

- ***I*** sólo se resta de los símbolos que le siguen ***V*** y ***X***

Ejemplos

$IV = 5 - 1 = 4$ $\quad$ $IX = 10 - 1 = 9$

- ***X*** sólo se resta de los símbolos que le siguen ***L*** y ***C***

Ejemplos

$XL = 50 - 10 = 40$ $\quad$ $XC = 100 - 10 = 90$

- ***C*** sólo se resta de los símbolos que le siguen ***D*** y ***M***

Ejemplos

$CD = 500 - 100 = 400$ $\quad$ $CM = 1\,000 - 100 = 900$

Los símbolos ***I, X, C*** y ***M*** no pueden repetirse más de 3 veces.

Ejemplos

$III = 3$ $\quad$ $XXX = 30$ $\quad$ $CCXXVI = 226$ $\quad$ $CD = 400$

$IV = 4$ $\quad$ $XL = 40$ $\quad$ $CCC = 300$ $\quad$ $MMM = 3\,000$

- **Principio multiplicativo.** Si un número es mayor que ***MMM* = 3 000**, se utiliza un segmento horizontal sobre el número, así se indica que el número queda multiplicado por 1 000.

Ejemplos

$\overline{IV} = 4 \times 1\,000 = 4\,000$ $\quad$ $\overline{\overline{IV}} = 4 \times 1\,000 \times 1\,000 = 4\,000\,000$

$\overline{XV} = 15 \times 1\,000 = 15\,000$

Al seguir los principios se puede convertir de numeración decimal a romana.

EJEMPLOS

1 Representar en numeración romana 368.

Solución

El número 368 se expresa de la siguiente manera en número romano.

368 =	300	60	8
368 =	***CCC***	***LX***	***VIII***

Por tanto, 368 = ***CCCLXVIII***

2 Representa el número 123 457 en numeración romana.

Solución

123 457 se escribe de la siguiente forma:

$$123\ 457 = 123 \times 1\ 000 + 400 + 50 + 7$$

Cada sumando representa un número romano

123 457 =	$123 \times 1\ 000$	400	50	7
123 457 =	$\overline{CXXIII}$	***CD***	***L***	***VII***

Por tanto, 123 457 = $\overline{CXXIII}$ ***CDLVII***

3 Convierte el número 245 305 379 a numeración romana.

Solución

245 305 379 se escribe de la siguiente forma:

$$245\ 305\ 679 = 245 \times 1\ 000 \times 1\ 000 + 305 \times 1\ 000 + 600 + 70 + 9$$

Cada sumando representa un número romano.

245 305 679 =	$245 \times 1\ 000 \times 1000$	$305 \times 1\ 000$	600	70	9
245 305 679 =	$\overline{\overline{CCXLV}}$	$\overline{CCCV}$	***DC***	***LXX***	***IX***

Finalmente, 245 305 679 = $\overline{\overline{CCXLV}}\ \overline{CCCV}$ ***DC LXX IX***

EJERCICIO 101

Representa en numeración romana:

1. 89
2. 99
3. 376
4. 786
5. 957
6. 1 004
7. 1 492
8. 1 589
9. 1 621
10. 1 810
11. 1 997
12. 12 345
13. 15 432
14. 23 007
15. 43 879
16. 89 000
17. 123 000
18. 230 005
19. 2 345 000
20. 8 340 020

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Al seguir los principios se puede convertir de numeración romana a decimal.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa el número ***MDCLXVI*** en sistema decimal.

Solución

Se indica la equivalencia de cada símbolo y se suman:

M	*D*	*C*	*L*	*X*	*V*	*I*
1 000	500	100	50	10	5	1

$$1\,000 + 500 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 = 1\,666$$

Por consiguiente, ***MDCLXVI*** = 1 666

2 Representa el número $\overline{\overline{XI}}\ \overline{CM}\ L$ en sistema decimal.

Solución

Se indica la equivalencia de cada símbolo y se suman:

$\overline{\overline{XI}}$	$\overline{CM}$	L
$11 \times 1\,000 \times 1\,000$	$900 \times 1\,000$	50

$$11\,000\,000 + 900\,000 + 50 = 11\,900\,050$$

Por tanto, $\overline{\overline{XI}}\,\overline{CM}\,L = 11\,900\,050$

EJERCICIO 102

Representa en sistema decimal.

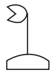
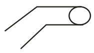
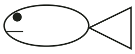
1. LXXXII
2. LXXIV
3. LVI
4. XCIII
5. XXXIX
6. LXVIII
7. DLXIV
8. DCCXIX
9. CDLII
10. CMXCI
11. DCCCIII
12. CCXLIV
13. MDCCCL
14. MDCCLII
15. MDCCCVI
16. MDXXV
17. MMDCCCXIV
18. MCDXXIX
19. $\overline{XXIII}$ CDLVII
20. $\overline{XIX}$ XX
21. $\overline{CCXLV}$
22. $\overline{MMMCDLVII}$ CMXCVIII
23. $\overline{\overline{IX}}$ $\overline{DLXXV}$ CMLXXIII
24. $\overline{\overline{IV}}$ $\overline{CMXLV}$ CMXII

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sistema de numeración egipcio

Los egipcios utilizaron un sistema en base 10, bajo el principio aditivo.

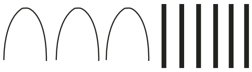
Simbología

Vara	Talón	Cuerda enrollada	Flor de loto	Dedo	Pez	Hombre asustado
						
1	**10**	**100**	**1 000**	**10 000**	**100 000**	**1 000 000**

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma a número decimal.



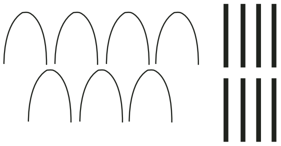
Solución

Se multiplica el número de símbolos por su respectivo valor y los resultados se suman.

$$\begin{array}{r} 30 \\ +\ \ 6 \\ \hline 36 \end{array}$$

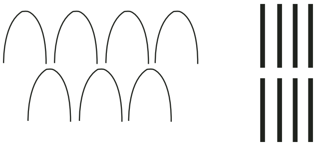
Por tanto, el resultado es 36

2 Transforma a número decimal.



Solución

Se multiplica el número de símbolos por su respectivo valor y los resultados se suman.



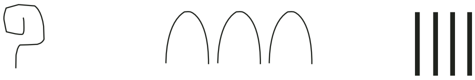
$7 \times 10 = 70$ $\quad 8 \times 1 = 8$

$$\begin{array}{r} 70 \\ +\ \ 8 \\ \hline 78 \end{array}$$

Por tanto, el resultado es 78

3 Transforma a número decimal.

Solución

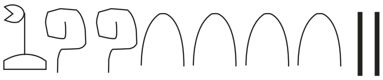


$1 \times 100 = 100$ $\quad 3 \times 10 = 30$ $\quad 4 \times 1 = 4$

$$\begin{array}{r} 100 \\ 30 \\ +\ \ 4 \\ \hline 134 \end{array}$$

Por consiguiente, el resultado es 134

4 Transforma a número decimal.



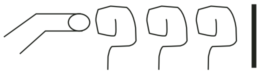
Solución

1 × 1 000 = 1 000   2 × 100 = 200   4 × 10 = 40   2 × 1 = 2

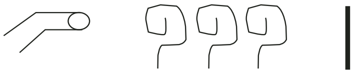
$$\begin{array}{r} 1\,000 \\ 200 \\ +\quad 40 \\ 2 \\ \hline 1\,242 \end{array}$$

Por tanto, el resultado es 1 242

5 Transforma a número decimal.



Solución



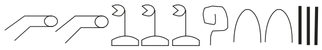
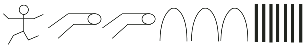
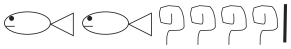
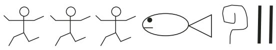
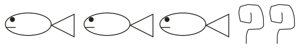
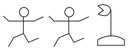
1 × 10 000 = 10 000   3 × 100 = 300   1 × 1 = 1

$$\begin{array}{r} 10\,000 \\ +\quad 300 \\ 1 \\ \hline 10\,301 \end{array}$$

Por consiguiente, el resultado es 10 301

EJERCICIO **103**

Transforma a numeración decimal.

1.
2. 
3.
4.
5. 
6. 
7.
8. 
9. 
10. 

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para representar un número decimal en numeración egipcia se siguen los siguientes pasos:

EJEMPLOS

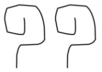
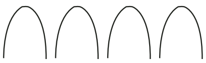
Ejemplos

1 Representa 243 en sistema de numeración egipcia.

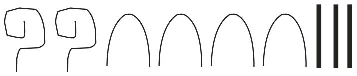
Solución

Se escribe el número 243 de la siguiente forma:

$$243 = \mathbf{2} \times 100 + \mathbf{4} \times 10 + \mathbf{3}$$

$2 \times 100 = 200$	$4 \times 10 = 40$	$3 \times 1 = 3$
		

Por tanto, el equivalente de 243 en numeración egipcia es:

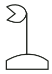
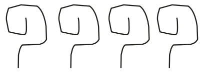
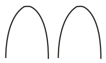


2 Convierte 1 422 a sistema de numeración egipcia.

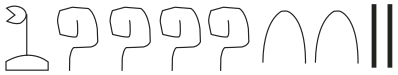
Solución

Se escribe el número 1 422 de la siguiente forma:

$$1\,422 = \mathbf{1} \times 1\,000 + \mathbf{4} \times 100 + \mathbf{2} \times 10 + \mathbf{2}$$

$1 \times 1\,000 = 1\,000$	$4 \times 100 = 400$	$2 \times 10 = 20$	$2 \times 1 = 2$
			

Por tanto, el equivalente de 1 422 en numeración egipcia es:

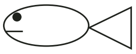


3 Representa 100 531 en sistema de numeración egipcia.

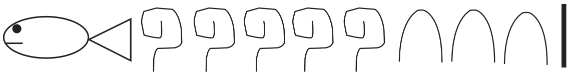
Solución

Se escribe el número 100 531 de la siguiente forma:

$$100\,531 = \mathbf{1} \times 100\,000 + \mathbf{5} \times 100 + \mathbf{3} \times 10 + \mathbf{1}$$

$1 \times 100\,000 = 100\,000$	$5 \times 100 = 500$	$3 \times 10 = 30$	$1 \times 1 = 1$
			

Por tanto, el equivalente de 100 531 en numeración egipcia es:



EJERCICIO 104

Convierte los siguientes a numeración egipcia.

1. 180
2. 240
3. 290
4. 320
5. 466
6. 580
7. 742
8. 760
9. 800
10. 945
11. 1 050
12. 1 430
13. 2 642
14. 5 900
15. 7 530
16. 9 417
17. 10 456
18. 115 403
19. 302 678
20. 3 546 129

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 10

Sistema métrico decimal y números denominados

Reseña HISTÓRICA

Año	Definición
1795	1/10 000 000 del cuadrante de meridiano terrestre.
1799	Materialización del valor anterior en una regla, a extremos, de platino depositada en los archivos de Francia.
1889	Patrón material internacional de platino iridiado, a trazos, depositado en el BIPM. Es llamado metro internacional.
1960	1 650 763 731 en el vacío de la radiación de kriptón 86, transición entre los niveles 2 p_{10} y 5 d_5. (Incertidumbre $1 \cdot 10^{-8}$).
1983	Longitud de trayecto recorrido en el vacío por la luz durante 1/299 792 458 segundos. (Incertidumbre $2.5 \cdot 10^{11}$).

Sistema métrico decimal

Sistema decimal de unidades físicas que toma su nombre de su unidad de longitud, el metro (del griego *metron*, "medida"). El sistema métrico decimal se propuso y adoptó legalmente en Francia a partir de 1790, después lo adoptaron como sistema común de pesos y medidas la mayoría de los países. En la actualidad el sistema métrico decimal se usa en todo el mundo para trabajos científicos.

El metro (m) se definió originalmente como una diezmillonésima parte de la distancia entre el ecuador y el polo norte a lo largo del meridiano de París. Entre 1792 y 1799 esta distancia fue medida parcialmente por científicos franceses; consideraron que la Tierra era una esfera perfecta y estimaron la distancia total, la que dividieron entre 10 millones. Más tarde, después de descubrirse que la forma de la Tierra no es esférica, el metro se definió como la distancia entre dos finas líneas trazadas en una barra de aleación de platino e iridio, el metro patrón internacional, conservado en París. Después volvió a definirse a partir de la longitud de onda de la luz rojiza emitida por una fuente de kriptón 86. Sin embargo, las medidas de la ciencia moderna requerían una precisión aún mayor, y en 1983 el metro se definió como la longitud del espacio recorrido por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de 1/299 792 458 de segundo.

En 1900 el sistema métrico se había ampliado para convertirse en el sistema MKS (metro-kilogramo-segundo), en el que la unidad de masa no era el gramo sino el kilogramo, y que además incluía la unidad de tiempo, el segundo. Posteriormente se añadió una unidad electromagnética, el ampere, para formar el sistema MKSA (metro-kilogramo-segundo-ampere). Como en la ciencia se necesitaban unidades más pequeñas, también se empleaba el sistema CGS o cegesimal (centímetro-gramo-segundo). La unidad de volumen se definió inicialmente como 1 decímetro cúbico, pero en 1901 se redefinió como el volumen ocupado por un kilogramo de agua a 4 °C de temperatura y una presión de 760 mm de mercurio; en 1964 se volvió a la definición original.

Para expresar múltiplos decimales de las unidades del sistema métrico se emplea una serie de prefijos griegos, mientras que para expresar fracciones decimales se utilizan otros prefijos latinos. El Sistema Internacional de unidades adoptó esos prefijos y añadió otros.

Sistema métrico decimal

Es el conjunto de medidas que se derivan de la longitud denominada metro.

Clases de medidas. Hay 5 clases de medidas: longitud, superficie, volumen, capacidad y masa.

Unidades de longitud

La unidad de longitud es el metro, que se representa con la letra *m*. Los múltiplos del metro se forman anteponiendo a la palabra metro los prefijos: deca (D), hecto (H) y kilo (k) que significan: diez, cien y mil; los submúltiplos se forman anteponiendo los prefijos: deci (d), centi (c) y mili (m), cuyo significado es: décima, centésima y milésima.

Equivalencias de longitud en el sistema métrico decimal

$$1 \text{ km} = 10 \text{ Hm} = 10^2 \text{ Dm} = 10^3 \text{ m} = 10^4 \text{ dm} = 10^5 \text{ cm} = 10^6 \text{ mm}$$

EJEMPLOS

1 Convierte 2.5 kilómetros a metros.

Solución

Se emplea la equivalencia correspondiente y se efectúa la conversión.
Equivalencia: $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$

$$\left(\frac{2.5 \text{ km}}{1}\right)\left(\frac{10^3 \text{m}}{1 \text{ km}}\right) = \frac{2.5 \times 10^3 \text{m} \cdot \text{km}}{1 \text{ km}} = \frac{2.5 \times 1\,000}{1} \text{m} = 2\,500 \text{ m}$$

2 Realiza la conversión de 450 centímetros a decámetros.

Solución

La equivalencia es: 10^2 Dm = 10^5 cm, se efectúa la conversión y se obtiene:

$$\left(\frac{450 \text{ cm}}{1}\right)\left(\frac{10^2 \text{ Dm}}{10^5 \text{ cm}}\right) = \frac{450 \times 10^2 \text{ Dm} \cdot \text{cm}}{10^5 \text{ cm}} = 450 \times 10^{-3} \text{ Dm} = 0.45 \text{ Dm}$$

3 Convierte 0.52 hectómetros a milímetros.

Solución

En este ejemplo la equivalencia es: $10 \text{ Hm} = 10^6 \text{ mm}$

$$\left(\frac{0.52 \text{ Hm}}{1}\right)\left(\frac{10^6 \text{ mm}}{10 \text{ Hm}}\right) = \frac{0.52 \times 10^6 \text{mm} \cdot \text{Hm}}{10 \text{ Hm}} = 0.52 \times 10^5 \text{mm} = 52\,000 \text{ mm}$$

EJERCICIO **105**

Realiza las siguientes conversiones:

1. 8 m ______ dm
2. 15 Dm ______ cm
3. 7.05 Hm ______ dm
4. 19 mm ______ m
5. 185 cm ______ dm
6. 9 cm ______ dm
7. 170 005 km ______ Dm
8. 54 Hm ______ m
9. 0.806 dm ______ cm
10. 16.50 km ______ Hm
11. 380 Dm ______ km
12. 6 300 m ______ dm

13. 380 Hm ______ km
14. 900 m ______ Hm
15. 600 cm ______ m
16. 45.63 m ______ cm
17. 3.016 m ______ mm
18. 0.85 m ______ mm
19. 15.480 km ______ m
20. 75.6 Dm ______ m

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Unidades de superficie

La unidad de superficie es el metro cuadrado, que es un cuadrado que tiene de lado un metro lineal y se representa con m^2.

Equivalencias de superficie en el sistema métrico decimal

$$1\text{ km}^2 = 10^2\text{ Hm}^2 = 10^4\text{ Dm}^2 = 10^6\text{ m}^2 = 10^8\text{ dm}^2 = 10^{10}\text{ cm}^2 = 10^{12}\text{ mm}^2$$

EJEMPLOS

1 Convierte 64 000 m^2 a km^2.

Solución

La equivalencia es: 1 km^2 = 10^6 m^2, al realizar la conversión se obtiene:

$$\left(\frac{64\,000\text{ m}^2}{1}\right)\left(\frac{1\text{ km}^2}{10^6\text{ m}^2}\right) = \frac{64\,000\text{ m}^2\cdot\text{km}^2}{1\,000\,000\text{ m}^2} = 0.064\text{ km}^2$$

2 Convierte 38 Dm^2 a dm^2.

Solución

La equivalencia es: 10^4 Dm^2 = 10^8 dm^2, al hacer la conversión se determina que:

$$\left(\frac{38\text{ Dm}^2}{1}\right)\left(\frac{10^8\text{ dm}^2}{10^4\text{ Dm}^2}\right) = \frac{38\times10^8\text{ dm}^2\cdot\text{Dm}^2}{10^4\text{ Dm}^2} = 38\times10^4\text{ dm}^2 = 380\,000\text{ dm}^2$$

EJERCICIO 106

Realiza la conversión de las siguientes medidas de superficie:

1. 3 m^2 ______ dm^2
2. 16 m^2 ______ cm^2
3. 7 m^2 ______ mm^2
4. 8 km^2 ______ m^2
5. 19 Hm^2 ______ m^2
6. 635 Dm^2 ______ m^2
7. 28 Hm^2 ______ Dm^2
8. 14 000 Dm^2 ______ m^2
9. 800 m^2 ______ Dm^2
10. 190 000 m^2 ______ Hm^2
11. 300 000 m^2 ______ km^2
12. 160 000 cm^2 ______ m^2
13. 13 000 dm^2 ______ m^2
14. 9 800 Hm^2 ______ km^2
15. 0.0014 km^2 ______ dm^2
16. 21 Dm^2 ______ dm^2
17. 4.3856 m^2 ______ cm^2
18. 1 800 dm^2 ______ m^2
19. 45 000 m^2 ______ Dm^2
20. 35 dm^2 ______ m^2

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Unidades de volumen

Las unidades de volumen son el metro cúbico, que es un cubo que tiene de arista un metro lineal y se representa con m^3 y el litro cuya representación es *l*.

Equivalencias de volumen en el sistema métrico decimal

$$1 \text{ km}^3 = 10^3 \text{ Hm}^3 = 10^6 \text{ Dm}^3 = 10^9 \text{ m}^3 = 10^{12} \text{ dm}^3 = 10^{15} \text{ cm}^3 = 10^{18} \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ kl} = 10 \text{ Hl} = 10^2 \text{ Dl} = 10^3 \text{ l} = 10^4 \text{ dl} = 10^5 \text{ cl} = 10^6 \text{ ml}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte 0.00726 Hm^3 a m^3.

Solución

Se emplea la equivalencia correspondiente y se efectúa la conversión.
Equivalencia: $10^3 \text{ Hm}^3 = 10^9 \text{ m}^3$

$$\left(\frac{0.00726 \text{ Hm}^3}{1}\right)\left(\frac{10^9 \text{ m}^3}{10^3 \text{Hm}^3}\right) = \frac{0.00726 \times 10^9 \text{ m}^3 \cdot \text{Hm}^3}{10^3 \text{Hm}^3} = 0.00726 \times 10^6 \text{ m}^3 = 7\,260 \text{ m}^3$$

2 Realiza la conversión de 180 000 cm^3 a m^3.

Solución:

La equivalencia es: $10^{15} \text{ cm}^3 = 10^9 \text{ m}^3$, se efectúa la conversión y se obtiene:

$$\left(\frac{180\,000 \text{ cm}^3}{1}\right)\left(\frac{10^9 \text{ m}^3}{10^{15} \text{ cm}^3}\right) = \frac{180\,000 \times 10^9 \text{ m}^3 \cdot \text{cm}^3}{10^{15} \text{ cm}^3} = 180\,000 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = 0.18 \text{ m}^3$$

3 Convierte 2 500 ml a Hl.

Solución:

En este ejemplo la equivalencia es: 10^6 ml = 10 Hl

$$\left(\frac{2\,500 \text{ ml}}{1}\right)\left(\frac{10 \text{ Hl}}{10^6 \text{ ml}}\right) = \frac{2\,500 \times 10 \text{Hl} \cdot \text{ml}}{10^6 \text{ ml}} = 2\,500 \times 10^{-5} \text{ Hl} = 0.025 \text{ Hl}$$

4 ¿Cuál es el resultado de convertir 7 kl a Hl?

Solución:

La equivalencia que se utiliza para realizar la conversión es: 1 kl = 10 Hl

$$\left(\frac{7 \text{ kl}}{1}\right)\left(\frac{10 \text{ Hl}}{1 \text{ kl}}\right) = \frac{70 \text{ Hl} \cdot \text{kl}}{1 \text{ kl}} = 70 \text{ Hl}$$

EJERCICIO **107**

Realiza la conversión de las siguientes medidas de volumen:

1. 24 m^3 ______ dm^3
2. 0.0138 m^3 ______ cm^3
3. 19 Dl ______ l
4. 149 dm^3 ______ cm^3
5. 7 cm^3 ______ mm^3
6. 9.54 kl ______ l
7. 0.485 m^3 ______ dm^3
8. 0.975 m^3 ______ cm^3
9. 591 ______ dl
10. 3.146 m^3 ______ dm^3

11. 40 000 dm^3 ______ m^3
12. 3.905 l ______ ml
13. 15 000 000 cm^3 ______ m^3
14. 60 000 mm^3 ______ cm^3
15. 9.6 Hl ______ Dl
16. 0.00045 m^3 ______ mm^3
17. 16.85 m^3 ______ dm^3
18. 15.3 kl ______ Hl
19. 0.0075 m^3 ______ cm^3
20. 43 m^3 ______ dm^3
21. 7.506 Dm^3 ______ m^3
22. 400 dl ______ Dl
23. 0.008316 m^3 ______ cm^3
24. 54.75 l ______ cl
25. 0.0000386 m^3 ______ cm^3
26. 1 800 dm^3 ______ m^3
27. 3 280 cl ______ l
28. 45 000 m^3 ______ Dm^3
29. 35 dm^3 ______ m^3
30. 17 000 ml ______ cl

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Unidades de masa

En el sistema internacional de unidades el kilogramo (kg) es el patrón de medida para las unidades de masa.

Equivalencias de masa en el sistema métrico decimal

$$1 \text{ kg} = 10 \text{ Hg} = 10^2 \text{ Dg} = 10^3 \text{ g} = 10^4 \text{ dg} = 10^5 \text{ cg} = 10^6 \text{ mg}$$

EJEMPLOS

1 Convierte 1 200 cg a Dg.

Solución

Se emplea 10^2 Dg = 10^5 cg para realizar la conversión:

$$\left(\frac{1200 \text{ cg}}{1}\right)\left(\frac{10^2 \text{ Dg}}{10^5 \text{ cg}}\right) = \frac{1200\times 10^2 \text{ Dg}\cdot\text{cg}}{10^5 \text{ cg}} = 1200\times 10^{-3}\text{Dg} = 1.2 \text{ Dg}$$

2 ¿A cuántos miligramos equivalen 0.023 kilogramos?

Solución

Para realizar esta conversión se emplea la equivalencia: 1 kg = 10^6 mg

$$\left(\frac{0.023 \text{ kg}}{1}\right)\left(\frac{10^6 \text{ mg}}{1 \text{ kg}}\right) = \frac{0.023\times 10^6 \text{ mg}\cdot\text{kg}}{1 \text{ kg}} = 23000 \text{ mg}$$

EJERCICIO 108

Realiza las siguientes conversiones con unidades de masa.

1. 3 kg ______ g
2. 700 dg ______ kg
3. 156 Hg ______ Dg
4. 36 kg ______ Dg
5. 7 Hg ______ Dg
6. 5 000 g ______ kg
7. 38 000 mg ______ Hg
8. 6 400 cg ______ g
9. 18 000 dg ______ g
10. 38 000 g ______ Hg

11. 40 dg	______ g	16. 80 dg	______ Hg
12. 850 g	______ Dg	17. 24.5 dg	______ g
13. 1 500 mg	______ g	18. 6.35 cg	______ dg
14. 4 900 cg	______ Dg	19. 17.28 cg	______ g
15. 24 000 dg	______ g	20. 38.5 g	______ mg

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Números denominados

Equivalencias de medidas de tiempo

1 siglo o centuria = 100 años

1 década = 10 años

1 lustro = 5 años

1 año = 12 meses

1 mes = 30 días

1 semana = 7 días

1 día = 24 horas

1 hora = 60 minutos = 3 600 segundos

1 minuto (min) = 60 segundos (s)

Equivalencias de medidas angulares

Grados (°) = 60 minutos

Minutos (′) = 60 segundos (″)

Todos los sistemas cuya ley de formación no sigue la ley decimal, dan lugar a los números denominados.

Analicemos algunos ejemplos de representación de un número denominado como una sola cantidad:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa ocho horas, cuarenta y cinco minutos y diecinueve segundos como número denominado.

Solución

La cantidad se expresa de la siguiente manera: 8h 45 min 19s.

2 Escribe en forma de número denominado: treinta y cinco grados, treinta minutos, seis segundos.

Solución

Se expresa la cantidad de la siguiente manera: 35° 30′ 6″.

3 Convierte a horas, minutos y segundos: 4 563 segundos.

Solución

Se divide la cantidad entre 3 600 s para obtener las horas, posteriormente se divide el residuo entre 60 para obtener los minutos y el último residuo representa a los segundos.

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 3\,600 & 4\,563 \\ & 963 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 16 \\ \hline 60 & 963 \\ & 363 \\ & 3 \end{array}$$

Por tanto, 4 563 segundos = 1 h 16 min 3 s.

4 Escribe en horas el número: 13 horas, 18 minutos.

Solución

Se convierten los 18 minutos a horas:

$$\left(\frac{18\,\text{min}}{1}\right)\left(\frac{1\text{h}}{60\,\text{min}}\right)=\frac{18\,\text{h}\cdot\text{min}}{60\,\text{min}}=\frac{18}{60}\text{h}=\frac{3}{10}\text{h}$$

El resultado se expresa: $13\frac{3}{10}\text{h}$

5 Expresa en años el número denominado: 4 años, 7 meses y 20 días.

Solución

Se convierten los días a meses y se suman a los 7 meses:

$$\left(\frac{20\,\text{días}}{1}\right)\left(\frac{1\,\text{mes}}{30\,\text{días}}\right)=\frac{20}{30}\text{mes}=\frac{2}{3}\text{mes} \quad ; \quad 7\,\text{meses}+\frac{2}{3}\text{meses}=\frac{23}{3}\text{meses}$$

Los meses resultantes se convierten a años:

$$\left(\frac{23\,\text{meses}}{3}\right)\left(\frac{1\,\text{año}}{12\,\text{meses}}\right)=\frac{23}{36}\text{años}$$

El resultado final es: $4\frac{23}{36}$ años.

EJERCICIO 109

Expresa como número denominado cada una de las siguientes cantidades:

1. Treinta y cinco años, nueve meses con veintitrés días.
2. Una hora con treinta segundos.
3. Ciento veinticuatro grados, cuarenta minutos y cincuenta y seis segundos.
4. Cinco meses, doce días, diecisiete horas.
5. Cuarenta y tres años, siete meses y diecisiete días.
6. Veinticinco meses, diecinueve días, ocho horas y cuarenta y cinco minutos.
7. Cuatrocientos treinta y ocho grados con cuarenta y tres segundos.
8. Tres décadas, ocho años, once meses y cuatro días.

Expresa las siguientes cantidades con números denominados:

9. 0.25 meses en días y horas.
10. 40.3° en grados y minutos.
11. $3\frac{5}{8}$ años en años, meses y días.
12. 145.98° en grados, minutos y segundos.
13. 3.745 décadas en años, meses y días.
14. 35.67° en grados, minutos y segundos.
15. 4.05 años en años, meses y días.
16. 85.61° en grados, minutos y segundos.

Expresa las siguientes cantidades como se indica:

17. 3 años, 10 meses, 15 días en años.
18. 78° 34′ 30″ en grados.
19. 6 h 43 min 12s en horas.
20. 324° 51′ 36″ en grados.
21. 3 décadas, 8 años, 18 días en décadas.
22. 148° 54″ en grados.
23. 2h 30s en minutos.
24. 25 días, 8 horas, 24 minutos en horas.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma

Se colocan los números en columnas, de tal forma que se correspondan las distintas unidades. La suma se inicia por las unidades menores, la reducción a unidades de orden superior, misma que se suma con las unidades de la siguiente columna y así, sucesivamente.

EJEMPLOS

1 ¿Cuál es el resultado de $45° \; 20' \; 35'' + 12° \; 42' \; 33''$?

Solución

Se acomodan las cantidades de manera vertical para que coincidan las respectivas unidades y se realizan las sumas.

$$\begin{array}{rr} & 45° \; 20' \; 35'' \\ + & 12° \; 42' \; 33'' \\ \hline & 57° \; 62' \; 68'' \end{array}$$

Al hacer las equivalencias $1' = 60''$ y $1° = 60'$, entonces el resultado se expresa como:

$$57° \; 62' \; 68'' = 57° \; 63' \; 8'' = 58° \; 3' \; 8''$$

2 Efectúa: 16 h 30 min 9 s + 26 h 45 min 53 s +15 h 21 min 17 s.

Solución

Se acomodan las cantidades como en el ejemplo anterior y se realizan las operaciones.

$$\begin{array}{rr} & 16 \text{ h } 30 \text{ min } 9 \text{ s} \\ + & 26 \text{ h } 45 \text{ min } 53 \text{ s} \\ & 15 \text{ h } 21 \text{ min } 17 \text{ s} \\ \hline & 57 \text{ h } 96 \text{ min } 79 \text{ s} \end{array}$$

Se aplican las equivalencias: 1 h = 60 min, 1 min = 60 s y el resultado se expresa como:

$$57 \text{ h } 96 \text{ min } 79 \text{ s} = 57 \text{ h } 97 \text{ min } 19 \text{ s} = 58 \text{ h } 37 \text{ min } 19 \text{ s}$$

EJERCICIO 110

Realiza las siguientes sumas:

1. $\begin{array}{rr} & 5\text{h } 14 \text{ min } 35\text{s} \\ + & 3\text{h } 25 \text{ min } 38\text{s} \\ \hline \end{array}$

2. $\begin{array}{rr} & 48° \; 17' \; 24'' \\ + & 169° \; 25' \; 38'' \\ \hline \end{array}$

3. $\begin{array}{rr} & 6 \text{ años } 4 \text{ meses } 15 \text{ días} \\ + & 2 \text{ años } 5 \text{ meses } 8 \text{ días} \\ \hline \end{array}$

4. $\begin{array}{rr} & 378° \; 28' \\ + & 128° \quad 25'' \\ \hline \end{array}$

5. $\begin{array}{rr} & 15\text{h } 23 \text{ min } 56\text{s} \\ + & 20\text{h } 42 \text{ min } 4\text{s} \\ \hline \end{array}$

6. $\begin{array}{rr} & 46° \; 55' \; 31'' \\ + & 224° \quad 59'' \\ \hline \end{array}$

7. $\begin{array}{rr} & 24 \text{ días } 16\text{h } 32 \text{ min } 43\text{s} \\ + & 8 \text{ días } 12\text{h } 56 \text{ min } 8\text{s} \\ \hline \end{array}$

8. $\begin{array}{rr} & 6 \text{ años } 7 \text{ meses } 27 \text{ días} \\ + & 4 \text{ años } 3 \text{ meses } 15 \text{ días} \\ & 11 \text{ años } 10 \text{ meses } 19 \text{ días} \\ \hline \end{array}$

9. $\begin{array}{rr} & 9° \; 18' \; 42'' \\ + & 120° \; 45' \; 53'' \\ & 156° \; 59' \; 35'' \\ \hline \end{array}$

10. $\begin{array}{rr} & 3 \text{ años } 7 \text{ meses } 12 \text{ días } 10 \text{ h } 26 \text{ min} \\ + & 4 \text{ años } 9 \text{ meses } 21 \text{ días } 17 \text{ h } 41 \text{ min} \\ & 7 \text{ años } 10 \text{ meses } 5 \text{ días } 11 \text{ h } 20 \text{ min} \\ & 8 \text{ años } 8 \text{ meses } 6 \text{ días } 14 \text{ h } 12 \text{ min} \\ \hline \end{array}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Resta

Se coloca el sustraendo debajo del minuendo, de modo que las unidades correspondan. Si algún sustraendo es mayor que el minuendo, se le agrega la unidad equivalente superior inmediata para que la resta sea posible.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de 10 días 7 h 15 min 16s – 4 días 8 h 20 min 18 s?

Solución

En este ejemplo algunos de los elementos del minuendo son menores que el sustraendo, por lo que el minuendo se expresa como: 10 días 7 h 15 min 16 s = 9 días 30 h 74 min 76 s.

```
   10 días 7 h 15 min 16 s          9 días 30 h 74 min 76 s
–   4 días 8 h 20 min 18 s      –   4 días  8 h 20 min 18 s
                                    5 días 22 h 54 min 58 s
```

Se efectúa la resta y se obtiene como resultado

5 días 22 h 54 min 58 s

2 Realiza: 123° 42″ – 79° 25′ 30″.

Solución

123° 42″ se expresa como: 122° 60′ 42″ para efectuar la operación.

```
   122° 60′ 42″
–   79° 25′ 30″
    43° 35′ 12″
```

Por tanto, el resultado es: 43° 35′ 12″

EJERCICIO **111**

Realiza las siguientes restas:

```
1.   4 años 9 meses 24 días
   – 1 año  7 meses 16 días

2.   135° 18′ 40″
   – 105° 12′ 16″

3.   10 meses 27 días 13 h
   –  8 meses 29 días 20 h

4.   220° 56′ 24″
   – 129° 42′ 55″

5.   6 meses 18 días 23 h
   – 5 meses 23 días  9 h

6.   250°
   – 233° 15′ 24″

7.   7 meses  9 días 18h 23 min
   – 2 meses 10 días 22h 46 min

8.   96°      36″
   – 58° 25′

9.   4 días 7 h 20 min
   – 3 días 2 h 35 min

10.  9h  7 min 48 s
   – 8h 10 min 35 s
```

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación

Esta operación sólo es posible cuando el multiplicador es un número natural.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa: 3 días 10 h 14 min × 5.

Solución

Las cantidades se acomodan de forma vertical y 5 multiplica a cada una de ellas.

$$\begin{array}{r} 3 \text{ días } 10 \text{ h } 14 \text{ min} \\ \times \qquad\qquad 5 \\ \hline 15 \text{ días } 50 \text{ h } 70 \text{ min} \end{array}$$

Este resultado se expresa de la siguiente forma:

15 días 50 h 70 min = 15 días 51 h 10 min = 17 días 3 h 10 min

2 ¿Cuál es el resultado de 56° 25″ × 12?

Solución

Se acomodan las cantidades y se efectúa el producto.

$$\begin{array}{r} 56^\circ \; 25'' \\ \times \quad 12 \\ \hline 672^\circ \; 300'' \end{array}$$

Este resultado se expresa como: 672° 5′

3 Realiza: 3 décadas 5 años 6 meses × 8.

Solución

Se multiplica 8 por el número denominado y se aplican las correspondientes equivalencias para obtener como resultado: 28 décadas 4 años.

$$\begin{array}{r} 3 \text{ décadas } 5 \text{ años } 6 \text{ meses} \\ \times \qquad\qquad\qquad 8 \\ \hline 24 \text{ décadas } 40 \text{ años } 48 \text{ meses} \end{array}$$

EJERCICIO **112**

Realiza las siguientes multiplicaciones:

1. 6 h 9 min 4 s × 8
2. 115° 24′ 12″ × 6
3. 15 días 5 h 48 min × 5
4. 65° 39′ 45″ × 15
5. 4 años 7 meses 23 días 4 h × 7
6. 225° 42′ 59″ × 7
7. 4 años 8 meses 16 días × 18
8. 156° 40″ × 12
9. 45h 28 min 36 s × 2
10. 18 años 2 meses 9 días × 6

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División

Esta operación sólo es posible cuando el dividendo es un número natural.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Divide: 31 h 2 min 15 s entre 5.

Solución

Se dividen las horas y el residuo se convierte en minutos y se suma a los 2 minutos.

$$\begin{array}{r|l} & 6\text{ h} \\ \hline 5 & 31\text{ h}\quad 2\text{ min}\quad 15\text{ s} \\ & \ \ 1\text{ h} \end{array}$$

$$1\text{ h} = 60\text{ min y } 60\text{ min} + 2\text{ min} = 62\text{ min}$$

Se dividen los minutos entre 5, los 2 minutos del residuo se convierten a segundos y se suman a los 15 segundos.

$$\begin{array}{r|l} & 6\text{ h } 12\text{ min} \\ \hline 5 & 31\text{ h}\quad 2\text{ min}\quad 15\text{ s} \\ & \ \ 1\text{ h } 62\text{ min} \\ & \qquad\quad 2\text{ min} \end{array}$$

$$2\text{ min} = 120\text{ s y } 120\text{ s} + 15\text{ s} = 135\text{ s}$$

Se dividen los segundos entre 5 y se obtiene el resultado final de la operación.

$$\begin{array}{r|l} & 6\text{ h } 12\text{ min}\quad 27\text{ s} \\ \hline 5 & 31\text{ h}\quad 2\text{ min}\quad 15\text{ s} \\ & \ \ 1\text{ h } 62\text{ min} \\ & \qquad\quad 2\text{ min } 135\text{ s} \\ & \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Por tanto, el resultado de la división es: 6 h 12 min 27 s.

2 ¿Cuál es el resultado de dividir 63° 25′ 44″ entre 12?

Solución

Se dividen los grados y el residuo se transforma en minutos y se suma a los minutos dados.

$$\begin{array}{r|l} & 5^\circ \\ \hline 12 & 63^\circ\ 25'\ 44'' \\ & \ \ 3^\circ \end{array}$$

$$3^\circ = 180' \text{ y } 180' + 25' = 205'$$

Se dividen los minutos y el residuo se convierte a segundos y se suma a los 44 segundos.

$$\begin{array}{r|l} & 5^\circ\quad 17' \\ \hline 12 & 63^\circ\quad 25'\ 44'' \\ & \ \ 3^\circ\ 205' \\ & \qquad\quad 1' \end{array}$$

$$1' = 60'' \text{ y } 60'' + 44'' = 104''$$

(*continúa*)

(*continuación*)
Se dividen los segundos y se obtiene el resultado final, que es igual a: 5° 17′ 8″ con un residuo de 8″

$$\begin{array}{r|l} & 5°\ \ 17'\ \ \ 8'' \\ \hline 12 & 63°\ \ 25'\ \ 44'' \\ & 1°\ 205' \\ & \quad\quad 1'\ 104'' \\ & \quad\quad\quad\quad 8'' \end{array}$$

EJERCICIO 113

Realiza las siguientes divisiones:

1. $5\overline{)\text{8 años 9 meses 15 días}}$
2. $9\overline{)95°\ 43'\ 12''}$
3. $12\overline{)\text{16 h 35 min 15 s}}$
4. $15\overline{)345°\ 30'\ 45''}$
5. $10\overline{)\text{4 h 20 min 16 s}}$
6. $7\overline{)330°\ 15'\ 2''}$
7. $5\overline{)\text{15 h 12 min 6 s}}$
8. $25\overline{)400°\quad 40''}$
9. $7\overline{)\text{35 h 56 min 14 s}}$
10. $5\overline{)\text{16 años 8 meses 15 días}}$
11. $4\overline{)\text{12 meses 28 días 20 h 48 min}}$
12. $20\overline{)686°\ 52'\ 20''}$
13. $3\overline{)\text{4 años 6 meses 18 días}}$
14. $56\overline{)1\,200°\quad 49''}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 11

Razonamiento aritmético

Los cuadrados mágicos

Los cuadrados mágicos son un pasatiempo que data de hace más de 3 000 años en la antigua India. Dicho cuadrado es una tabla con el mismo número de casillas verticales que horizontales y su magia radica en el hecho de que cualquiera que sea la forma en que se sumen los números que lo conforman, ya sea de manera horizontal, vertical o diagonalmente, siempre se llegará al mismo resultado, la *constante mágica*, por ejemplo:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Los cuadrados mágicos de orden 4 fueron introducidos en el siglo XV en el Renacimiento europeo. En aquellos años de superstición solían hacer grabados en planchas de plata como conjuro contra la peste, ya que se les atribuía poderes mágicos.

A continuación se propone resolver el cuadrado mágico inventado por el pintor alemán Alberto Durero, el cual contiene en las casillas centrales inferiores el año de la gran peste: 1514, y cuya suma en forma horizontal, vertical y de sus diagonales principales es 34.

	15	14	

Problemas con números enteros

EJEMPLOS

1 Si la diferencia del triple de un número y el mismo es igual a 8, ¿cuál es el número?

Solución

Si 8 es el triple del número menos el mismo, entonces 8 es el doble del número.

Por tanto, el número es $8 \div 2 = 4$

2 Brenda multiplicó un número por 4, restó 12 al producto, sumó 18 a la diferencia, la suma la dividió entre 19 y obtuvo 2 como cociente, ¿cuál es el número?

Solución

Se comienza por el final del problema y se realizan las operaciones inversas.

2 es el resultado de dividir entre 19, entonces se multiplica: $2 \times 19 = 38$
38 es el resultado de sumar 18, luego se resta: $38 - 18 = 20$
20 es el resultado de restar 12, ahora se suma: $20 + 12 = 32$
32 es el resultado de multiplicar por 4, entonces se divide: $32 \div 4 = 8$

Finalmente, el número es 8

Propiedades

1. La suma de 2 números enteros más su diferencia es igual al doble del mayor.
   Si $a > b$, entonces $(a+b)+(a-b) = 2 \cdot a$
2. La suma de 2 números enteros menos su diferencia es igual al doble del número menor.
   Si $a > b$, entonces $(a+b)-(a-b) = 2 \cdot b$
3. Al dividir la suma de 2 números enteros entre su cociente aumentado en 1, el resultado es igual al número menor.
   Si $a > b$, entonces $(a+b) \div (a \div b + 1) = b$
4. Al dividir la diferencia de 2 números enteros entre su cociente disminuido en 1, el resultado es igual al número menor.
   Si $a > b$, entonces $(a-b) \div (a \div b - 1) = b$

EJEMPLOS

1 Si la suma de 2 números es 18 y la diferencia es 2, ¿cuáles son los números?

Solución

Al aplicar la propiedad 1, se suma $18 + 2 = 20$, se obtiene el doble del mayor, es decir, $20 \div 2 = 10$, es el número mayor, luego para obtener el número menor se resta de la suma $18 - 10 = 8$

Por consiguiente, los números son 10 y 8

2 Si la diferencia de 2 números es 12 y su cociente es 3, ¿cuáles son los números?

Solución

Al aplicar el teorema 4 se tiene que: $12 \div (3-1) = 12 \div 2 = 6$, el resultado es el número menor, si la diferencia es 12, entonces el número mayor es $12 + 6 = 18$

Por tanto, los números son 18 y 6

3 Entre 2 ciudades A y B hay una distancia de 480 km. A las 8 de la mañana de la ciudad A sale un automóvil con una velocidad de $70\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿a qué hora se encontrará con un automóvil que sale a la misma hora de B hacia A con una velocidad $90\frac{\text{km}}{\text{h}}$ y a qué distancia de la ciudad estará A?

Solución

70 kilómetros es la distancia que recorre en 1 hora el automóvil que sale de A.

90 kilómetros es la distancia que recorre en 1 hora el automóvil que sale de B.

En 1 hora se acercarán: 70 km + 90 km = 160 km.

La distancia entre A y B: 480 kilómetros

Tiempo que tardarán en encontrarse: $480 \div 160 = 3$ horas.

Por tanto, si salieron a las 8 de la mañana, se encontrarán a las $8 + 3 = 11$ de la mañana y a una distancia de $70(3) = 210$ kilómetros de la ciudad A.

4 Una ciudad B está situada a 240 km al este de otra ciudad A. Si a las 8 de la mañana sale un automóvil de la ciudad B con dirección este y a una velocidad de $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿en cuánto tiempo lo alcanzará un automóvil que sale de A a las 10:00 a.m. con una velocidad de $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$ en la misma dirección?

Solución

Si el automóvil que sale de B recorre 60 km cada hora, a las 10 de la mañana habrá recorrido $60 \times 2 = 120$ km.

La distancia entre los automóviles será de $240 + 120 = 360$ km.

80 kilómetros es la distancia que recorre el automóvil A en 1 hora.

En 1 hora se acerca $80 - 60 = 20$ km.

Distancia entre A y B a las 10:00 a.m.: 360 km

Tiempo que tardarán en encontrarse $360 \div 20 = 18$ horas.

Por consiguiente, tardará en alcanzarlo 18 horas.

5 Luis, Marcos y Andrés tienen bolsas con canicas, si se juntan las bolsas con canicas de Luis y Marcos suman 200, las bolsas de Marcos y Andrés suman 320 y las de Luis y Andrés 280 canicas, ¿cuántas canicas tiene cada uno?

Solución

Al sumar $200 + 320 + 280 = 800$, este resultado es el doble de canicas de Luis, Marcos y Andrés, entonces el total de canicas es: $800 \div 2 = 400$

Si Luis y Marcos juntos tienen 200, entonces Andrés tiene $400 - 200 = 200$ canicas.

Si Marcos y Andrés juntos tienen 320, entonces Luis tiene $400 - 320 = 80$ canicas.

Si Luis y Marcos juntos tienen 200 y Luis tiene 80 canicas, entonces Marcos $200 - 80 = 120$ canicas.

Finalmente, Luis tiene 80, Marcos 120 y Andrés 200 canicas.

6 Un tanque tiene 2 llaves y un desagüe, una vierte 80 litros en 8 minutos y la otra 60 litros en 10 minutos, además, por el desagüe salen 180 litros en 20 minutos. Si el tanque tenía 600 litros y al abrir las llaves y el desagüe al mismo tiempo tardó 30 minutos en llenarse, ¿cuál es la capacidad total del tanque?

Solución

$80 \div 8 = 10$, es el número de litros por minuto que vierte la primera llave.

$60 \div 10 = 6$, es el número de litros por minuto que vierte la segunda llave.

$180 \div 20 = 9$, es el número de litros que salen por el desagüe.

(continúa)

(*continuación*)
$10+6=16$, es el número de litros que vierten por minuto las 2 llaves juntas.
$16-9=7$, es el número de litros que quedan por minuto.
Entonces, en 30 minutos quedan $(30)(7)=210$ litros.

Por tanto, si el tanque tenía 600 litros, la capacidad total es de $600+210=810$ litros.

EJERCICIO 114

1. La suma entre el cuádruplo de un número y el mismo es igual a 60, ¿cuál es el número?
2. La diferencia entre el séxtuplo de un número y el doble del mismo es igual a 20, ¿cuál es el número?
3. Se multiplica un número por 8, se suma 10 al producto, se resta 20 a la suma y la diferencia se divide entre 19, así se obtiene como cociente 2, ¿cuál es el número?
4. Se divide un número entre 9, se suma 32 al cociente, se obtiene la raíz cuadrada de la suma y este resultado se multiplica por 4, el resultado es 24, ¿cuál es el número?
5. La suma del triple de un número con 6 se multiplica por 2 y el resultado se divide entre 12, se obtiene como resultado 5, ¿cuál es el número?
6. La suma de 2 números es 29 y la diferencia es 21, ¿cuáles son los números?
7. El cociente de 2 números es 6 y la diferencia es 35, ¿cuáles son los números?
8. El doble de la diferencia de 2 números es 18 y el cuádruplo de su cociente es 16, ¿cuáles son los números?
9. Dos ciudades M y N se encuentran a 640 km de distancia entre sí. A las 10 de la mañana de la ciudad M sale un automóvil rumbo a la ciudad N, con una velocidad de $85\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a la misma hora de N sale otro automóvil rumbo a M con una velocidad de $75\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿a qué hora se encontrarán y qué distancia ha recorrido cada uno?
10. Entre 2 ciudades P y Q hay una distancia de 990 km. Si a las 11:00 a.m. sale un automóvil de P en dirección a Q con una velocidad de $70\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿a qué hora se encontrará con otro automóvil que sale a la 1 de la tarde de Q hacia P con una velocidad de $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$?
11. Un automóvil sale a las 6 de la mañana con una velocidad de $75\frac{\text{km}}{\text{h}}$ si otro automóvil sale a las 8 de la mañana con una velocidad de $105\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿a qué hora el segundo automóvil alcanzará al primero?
12. Una ciudad X está situada a 180 km al oeste de una ciudad Z, si a las 9:00 a.m. sale de X un automóvil con dirección oeste a una velocidad de $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿a qué hora lo alcanzará un automóvil que sale de Z en la misma dirección, 1 hora después y con una velocidad de $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$?
13. Fernanda pagó por una playera y un short $1 100, Adriana pagó por la misma playera y un par de tenis $1 800, mientras que Alejandra compró el short y el par de tenis en $1 700. ¿Cuál es el precio de cada artículo?
14. Las edades de Paulina y Mónica suman 36, las de Mónica y Andrea 40, mientras que la suma de las edades de Paulina y Andrea es 44, ¿cuántos años tiene cada una?

15. Un tanque de 720 litros de capacidad tiene 3 llaves, una de ellas vierte 65 litros en 13 minutos, otra vierte 70 litros en 10 minutos y la última vierte 90 litros en 15 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse el tanque vacío si se abren las 3 llaves al mismo tiempo?

16. Un estanque tiene 2 llaves y 2 desagües, si la primera llave vierte 100 litros en 20 minutos, la segunda 112 litros en 16 minutos, mientras que por un desagüe salen 60 litros en 15 minutos y por el otro salen 42 litros en 14 minutos, ¿cuál es la capacidad del estanque si al abrir las dos llaves y los desagües tardó 50 minutos en llenarse?

17. Un estanque con capacidad de 5 400 litros tiene 2 llaves, una vierte 42 litros en 6 minutos y la otra 64 litros en 8 minutos, también tiene un desagüe por el que salen 48 litros en 12 minutos, si el estanque tiene 2 100 litros y se abren las llaves y el desagüe al mismo tiempo, ¿cuánto tardará en llenarse?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Problemas con fracciones

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Al dividir 60 entre cierto número se obtiene $\frac{3}{4}$, ¿cuál es el número?

Solución

60 es el dividendo y $\frac{3}{4}$ el cociente, entonces se divide 60 entre el cociente para obtener el divisor.

$$60 \div \frac{3}{4} = \frac{(60)(4)}{3} = \frac{240}{3} = 80$$

Por tanto, si se divide 60 entre 80 se obtiene $\frac{3}{4}$

2 Al multiplicar $\frac{5}{2}$ por cierto número se obtiene $\frac{1}{20}$, ¿cuál es el número?

Solución

$\frac{5}{2}$ es uno de los factores y $\frac{1}{20}$ el producto, entonces se divide $\frac{1}{20}$ entre $\frac{5}{2}$ y se obtiene el otro factor.

$$\frac{1}{20} \div \frac{5}{2} = \frac{(1)(2)}{(20)(5)} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

Por tanto, el número es $\frac{1}{50}$

3 Un granjero tiene 200 animales, la cuarta parte son patos, la tercera parte del resto son vacas, las $\frac{2}{5}$ partes del resto cerdos y los demás son gallinas, ¿cuántas gallinas tiene?

Solución

La cuarta parte son patos:

$\frac{1}{4}(200) = \frac{200}{4} = 50$, entonces hay 50 patos y restan 150 animales.

La tercera parte del resto son vacas:

$\frac{1}{3}(150) = \frac{150}{3} = 50$, por tanto hay 50 vacas y restan 100 animales.

Las dos quintas partes del resto son cerdos:

$\frac{2}{5}(100) = \frac{200}{5} = 40$, entonces hay 40 cerdos y restan 60 animales.

Finalmente, el número de gallinas es 60

4 Rodolfo gastó la novena parte de su dinero y le quedaron \$32 000, ¿cuánto dinero tenía?

Solución

Si Rodolfo gastó la novena parte, entonces \$32 000 son los $\frac{8}{9}$ del total de dinero que tenía.

Por tanto, se divide 32 000 entre $\frac{8}{9}$

$$32\,000 \div \frac{8}{9} = \frac{(32\,000)(9)}{8} = \frac{288\,000}{8} = 36\,000$$

Por consiguiente, Rodolfo tenía \$36 000

5 Mauricio compró una camisa y unos pantalones en \$1 000, si la camisa costó la tercera parte del precio del pantalón, ¿cuánto costó el pantalón?

Solución

Si la camisa costó la tercera parte del pantalón, \$1 000 son $\frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ del precio del pantalón, entonces el costo del pantalón es: $1\,000 \div \frac{4}{3} = \frac{(1\,000)(3)}{4} = \frac{3\,000}{4} = 750$

Por consiguiente, el precio del pantalón es de \$750

6 Víctor puede hacer un trabajo en 6 horas y Alberto hace el mismo en 8 horas. ¿En cuántas horas podrán hacer el mismo trabajo juntos?

Solución

En 1 hora Víctor hace $\frac{1}{6}$ del trabajo.

En 1 hora Alberto hace $\frac{1}{8}$ del trabajo.

Ambos en 1 hora harán $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{4+3}{24} = \frac{7}{24}$ del trabajo.

Luego, para hacer los $\frac{24}{24} = 1$ trabajo, se divide:

$$1 \div \frac{7}{24} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$$

Por tanto, ambos tardarán $3\frac{3}{7}$ horas en realizar el mismo trabajo.

7 Dos llaves llenan un depósito en 8 horas, si una de ellas lo llena en 12 horas, ¿en cuánto tiempo lo llenará la otra llave?

Solución

En 1 hora ambas llaves llenan $\frac{1}{8}$ del depósito.

En 1 hora una de las llaves llena $\frac{1}{12}$ del depósito.

La otra llave llena $\frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{3-2}{24} = \frac{1}{24}$ del depósito.

Por tanto, la otra llave lo llena en 24 horas.

8 Un depósito tiene 2 llaves y un desagüe, una de las llaves tarda 6 horas en llenarlo y la otra lo llena en 4 horas. Si está el depósito lleno tarda 8 horas en vaciarse. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse si se abren al mismo tiempo las 2 llaves y el desagüe?

Solución

En 1 hora las 2 llaves llenan,

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{2+3}{12}=\frac{5}{12}\text{ del depósito.}$$

En 1 hora se vacía $\frac{1}{8}$ del depósito.

Luego, abriendo todo al mismo tiempo en 1 hora se llena

$$\frac{5}{12}-\frac{1}{8}=\frac{10-3}{24}=\frac{7}{24}\text{ del depósito.}$$

Entonces, tardará en llenarse,

$$1\div\frac{7}{24}=\frac{24}{7}=3\frac{3}{7}$$

Finalmente, el depósito se llenará en $3\frac{3}{7}$ horas.

EJERCICIO 115

1. Si al multiplicar un número por $\frac{2}{3}$ se obtiene 20 como producto, ¿cuál es el número?
2. Si al dividir un número entre $\frac{1}{2}$ se obtiene $\frac{5}{2}$ como cociente, ¿cuál es el número?
3. Al multiplicar $\frac{4}{5}$ por cierto número se obtiene 3 como producto, ¿cuál es el número?
4. Al dividir $\frac{5}{6}$ entre cierto número se obtiene $\frac{5}{4}$ como resultado, ¿cuál es el número?
5. La cuarta parte de un número es 6, ¿cuál es el número?
6. Las tres quintas partes de un número son $\frac{6}{7}$, ¿cuál es el número?
7. Al preguntar Luis a su profesor de matemáticas la hora, éste le responde que son los tres cuartos del cuádruplo de un tercio de las 9 de la mañana, ¿qué hora es?
8. Margarita tiene la quinta parte de las tres cuartas partes del quíntuplo de la edad de Brenda. ¿Cuántos años tiene Margarita, si Brenda tiene 24 años?
9. El cociente de 2 números es $\frac{5}{3}$ y su MCD es 14, ¿cuáles son los números?
10. El cociente de 2 números es $\frac{4}{7}$ y su mcm es 140, ¿cuáles son los números?
11. El cociente de 2 números es $\frac{3}{2}$ su MCD es 30, ¿cuál es el mcm de los números?
12. La población de un colegio es de 600 alumnos. Si las dos terceras partes de los hombres asisten a un torneo de futbol, ¿cuántos hombres se quedaron en el colegio, si las tres cuartas partes del total son mujeres?
13. Una región produce 750 toneladas de maíz, de las cuales utiliza la quinceava parte para consumo de su comunidad, las tres quintas partes del resto se envían a la Ciudad de México y el resto lo exportan, ¿cuántas toneladas son exportadas?

14. Adrián hace su testamento dejando las dos quintas partes de su fortuna a sus hijos, la cuarta parte a su esposa, la quinta parte a su chofer y $3 750 000 a una institución de beneficencia. ¿A cuánto asciende su fortuna?
15. José construye una barda en 24 días, David en 12 y Pedro en 8 días. ¿En cuánto tiempo la construirán los 3 juntos?
16. Una llave llena un depósito en 6 horas, otra lo llena en 9, ¿en cuánto tiempo lo llenarán si se abren al mismo tiempo ambas llaves?
17. Dos llaves llenan un depósito en 4 horas, si una de ellas lo llena en 12 horas, ¿en cuánto tiempo lo llena la otra llave?
18. Una llave llena un depósito en 5 horas, otra lo llena en 3 horas 20 minutos. Si se abren las 2 llaves al mismo tiempo, ¿qué parte del depósito se llena en 1 hora?
19. Un depósito tiene 2 llaves y 2 desagües. Una de las llaves tarda 8 horas en llenarlo y la otra 12 horas, si se abre uno de los desagües cuando el depósito está lleno tarda 24 horas en vaciarse, mientras que con el otro desagüe tarda 12 horas. ¿Cuánto tiempo tarda en llenarse si se abren al mismo tiempo las llaves y los desagües?
20. Un depósito de agua tiene 2 llaves, una de ellas lo llena en 36 minutos, mientras que la otra lo llena en 12 minutos. Si el depósito está lleno hasta los $\frac{4}{9}$ de su capacidad, ¿en cuánto tiempo acabará de llenarse si se abren al mismo tiempo las 2 llaves?
21. Mario y José Luis pintan una barda en 4 días; Mario trabajando solo, tardaría 6 días. ¿En cuántos días la pinta José Luis?
22. Alfredo hace un trabajo en 12 horas, Juan y Pedro juntos hacen el mismo en 6 horas. ¿En cuánto tiempo lo harán Alfredo y Juan, si Pedro tarda 8 horas en hacer el mismo trabajo?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Problemas de agrupación

En ocasiones es conveniente agrupar u ordenar las operaciones de tal forma que al resolverlas el proceso sea más sencillo.

Para resolver los siguientes problemas se utilizarán algunas fórmulas y conceptos.

EJEMPLOS

1 Deduce la fórmula para hallar la suma de 1 +2 + 3 + 4 +5 +… + n.

Solución

Sea $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 +\ldots + n$, se invierte el orden de los sumandos de S y se efectúa la suma de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccccccccccccc} S = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ S = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S = & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & \ldots & + & n+1 & & n+1 & & n+1 \end{array}$$

Existen $(n + 1)$ sumandos y son n términos, la suma es:

$$2S = n(n + 1)$$

Si $n\ (n + 1)$ es el doble de la suma, entonces la suma es:

$$\boldsymbol{S = \frac{n(n+1)}{2}}$$

La cual se le conoce como la fórmula de Gauss, para hallar la suma de los primeros n números naturales.

2 Calcula la suma de 4 + 8 + 12 + 16 +… + 200.

Solución

Los términos de la suma son múltiplos de 4, al aplicar la propiedad distributiva de los números reales $a(b + c) = ab + ac$, la suma se escribe de la siguiente forma:

$$4 + 8 + 12 + 16 +\ldots + 200 = 4(1 +2 + 3 + 4 +\ldots + 50)$$

Al aplicar la fórmula de Gauss en la suma 1 + 2 + 3 + 4 +… + 50 con $n = 50$ se tiene que:

$$S = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{50(50+1)}{2} = \frac{(50)(51)}{2} = \frac{2\,550}{2} = 1275$$

Luego:

$$\begin{aligned} 4 + 8 + 12 + 16 +\ldots + 200 &= 4(1 +2 + 3 + 4 +\ldots + 50) \\ &= 4(1\,275) \\ &= 5\,100 \end{aligned}$$

Por tanto, 4 + 8 + 12 + 16 + … + 200 = 5 100

3 Determina el resultado de 1 – 4 + 16 – 64 + 256 – 1 024.

Solución

La suma se escribe de la siguiente manera:

$$1 - 4 + 16 - 64 + 256 - 1\,024 = 1 + (-4)^1 + (-4)^2 + (-4)^3 + (-4)^4 + (-4)^5$$

La expresión anterior tiene la forma:

$$\mathbf{1 + a^1 + a^2 + a^3 + a^4 +\ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}}$$

Donde $a = -4$, $n = 5$:

$$1 + (-4)^1 + (-4)^2 + (-4)^3 + (-4)^4 + (-4)^5 = \frac{(-4)^{5+1} - 1}{(-4) - 1} = \frac{(-4)^6 - 1}{-4 - 1}\ \frac{4\,096 - 1}{-5}$$

$$= \frac{4\,095}{-5} = -819$$

Por consiguiente, 1 – 4 + 16 – 64 + 256 – 1 024 = – 819

4 Escribe 111 111 como suma de potencias de 10.

Solución

La cantidad 111 111 se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 111\,111 &= 100\,000 + 10\,000 + 1\,000 + 100 + 10 + 1 \\ &= 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0 \end{aligned}$$

Por tanto, $111\,111 = 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0$

5 Escribe $2^7 + 2^7$ como potencia de 2.

Solución

$2^7 + 2^7 = 2^7\,(1 + 1)$	Propiedad distributiva de los números reales.
$= 2^7\,(2)$	
$= 2^7\,(2)^1$	
$= 2^{7+1}$	Teorema de los exponentes $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$= 2^8$	

Por consiguiente, $2^7 + 2^7 = 2^8$

6 ¿Cuántos dígitos tiene el producto de $2^{2006} \times 5^{2012}$?

Solución

5^{2012} se descompone de la siguiente forma:

$$5^{2012} = 5^{2006} \times 5^{6}$$

Luego:

$$2^{2006} \times 5^{2012} = 2^{2006} \times \left(5^{2006} \times 5^{6}\right)$$

$= \left(2^{2006} \times 5^{2006}\right) \times \left(5^{6}\right)$ Propiedad asociativa de los números reales.

$= \left(2 \times 5\right)^{2006} \times 5^{6}$ Teorema de los $(a \cdot b)^{n} = a^{n} \cdot b^{n}$

$= \left(2 \times 5\right)^{2006} \times 5^{6}$

$= \left(2 \times 5\right)^{2006} \times 15\,625$

$= 15\,625 \times 10^{2006}$ Propiedad conmutativa de los números reales.

↑ 5 dígitos ↑ 2 006 dígitos

Por tanto, el producto tiene 5 + 2 006 = 2 011 dígitos.

7 Calcula el producto de todos los divisores de $3^{100} \times 5^{100}$

Solución

Los divisores de 3^{100} son: $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{100}$
Los divisores de 5^{100} son: $5^0, 5^1, 5^2, 5^3, \ldots, 5^{100}$
Los divisores de aaa$3^{100} \times 5^{100}$ se obtienen al multiplicar cada uno de los divisores de 3^{100} por los divisores de 5^{100}, es decir:

$$\begin{array}{cccccc}
3^0 \times 5^0 & 3^0 \times 5^1 & 3^0 \times 5^2 & 3^0 \times 5^3 & \ldots & 3^0 \times 5^{100} \\
3^1 \times 5^0 & 3^1 \times 5^1 & 3^1 \times 5^2 & 3^1 \times 5^3 & \ldots & 3^1 \times 5^{100} \\
3^2 \times 5^0 & 3^2 \times 5^1 & 3^2 \times 5^2 & 3^2 \times 5^3 & \ldots & 3^2 \times 5^{100} \\
3^3 \times 5^0 & 3^3 \times 5^1 & 3^3 \times 5^2 & 3^3 \times 5^3 & \ldots & 3^3 \times 5^{100} \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots \\
3^{100} \times 5^0 & 3^{100} \times 5^1 & 3^{100} \times 5^2 & 3^{100} \times 5^3 & \ldots & 3^{100} \times 5^{100}
\end{array}$$

Al multiplicar los números de cada renglón se obtiene:

$(3^0 \times 5^0) \times (3^0 \times 5^1) \times (3^0 \times 5^2) \times \ldots \times (3^0 \times 5^{100}) = 3^{101} \times (5^0 \times 5^1 \times 5^2 \times \ldots \times 5^{100})$
$(3^1 \times 5^0) \times (3^1 \times 5^1) \times (3^1 \times 5^2) \times \ldots \times (3^1 \times 5^{100}) = (3^1)^{101} \times (5^0 \times 5^1 \times 5^2 \times \ldots \times 5^{100})$
$(3^2 \times 5^0) \times (3^2 \times 5^1) \times (3^2 \times 5^2) \times \ldots \times (3^2 \times 5^{100}) = (3^2)^{101} \times (5^0 \times 5^1 \times 5^2 \times \ldots \times 5^{100})$
.
.
.
$(3^{99} \times 5^0) \times (3^{99} \times 5^1) \times (3^{99} \times 5^2) \times \ldots \times (3^{99} \times 5^{100}) = (3^{99})^{101} \times (5^0 \times 5^1 \times 5^2 \times 5^3 \times \ldots \times 5^{100})$
$(3^{100} \times 5^0) \times (3^{100} \times 5^1) \times (3^{100} \times 5^2) \times \ldots \times (3^{100} \times 5^{100}) = (3^{100})^{101} \times (5^0 \times 5^1 \times 5^2 \times 5^3 \times \ldots \times 5^{100})$

Al multiplicar los productos se obtiene:

$$\left(\left(3^0\right)^{101}\times\left(3^1\right)^{101}\times\left(3^2\right)^{101}\times\left(3^3\right)^{101}\times\ldots\times\left(3^{99}\right)^{101}\times\left(3^{100}\right)^{101}\right)\times\left(5^0\times5^1\times5^2\times5^3\times\ldots\times5^{99}\times5^{100}\right)^{101}=$$

$$\left(3^0\times3^1\times3^2\times3^3\times\ldots\times3^{99}\times3^{100}\right)^{101}\times\left(5^0\times5^1\times5^2\times5^3\times\ldots\times5^{99}\times5^{100}\right)^{101}$$

$$=\left(3^0\times3^1\times3^2\times3^3\times\ldots\times3^{99}\times3^{100}\right)^{101}\times\left(5^0\times5^1\times5^2\times5^3\times\ldots\times5^{99}\times5^{100}\right)^{101}$$

$$=\left(3^{0+1+2+3+\ldots+99+100}\right)^{101}\times\left(5^{0+1+2+3+\ldots+99+100}\right)^{101}$$

Para determinar la suma de 1 + 2 + 3 + … + 99 + 100 se utiliza la fórmula de Gauss.

$$S=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$0+1+2+3+\ldots+99+100=0+\frac{100(100+1)}{2}=\frac{(100)(101)}{2}=5\,050 \text{ con } n=100$$

$$=\left(3^{5\,050}\right)^{101}\times\left(5^{5\,050}\right)^{101}=\left(3^{5\,050}\times5^{5\,050}\right)^{101}=\left[(3\times5)^{5\,050}\right]^{101}=(3\times5)^{5\,050\times101}=(15)^{510\,050}$$

Finalmente, el producto de los divisores de $3^{100}\times5^{100}$ es $(15)^{510\,050}$

Sea N un número compuesto, su descomposición en factores primos se representa con $\boldsymbol{N = a^m b^n c^p \ldots}$ con a, b, c números primos; m, n, p números naturales.

El número de divisores de N está dado por el producto

$$\boldsymbol{(m+1)(n+1)(p+1)\ldots}$$

Ejemplo

Encuentra el número de divisores de 108.

Solución

108 se descompone en factores primos, es decir, $108 = 2\times2\times3\times3\times3 = 2^2\times3^3$

Al aplicar la fórmula con $m = 2$, $n = 3$, se tiene que:

$$(m+1)(n+1)=(2+1)(3+1)=3\times4=12$$

Por tanto, el número de divisores de 108 son 12

Suma de los divisores de un número

Sea N un número compuesto, su descomposición en factores primos está dada por $N = a^m b^n c^p \ldots$ con a, b, c números primos; m, n, p números naturales.

La suma de los divisores de N está dada por la fórmula:

$$S=\frac{a^{m+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{p+1}-1}{c-1}\cdot\ldots$$

Ejemplo

Determina la suma de los divisores de 9 000.

Solución

El número 9 000 se descompone en sus factores primos y se representa de la forma $a^m b^n c^p \ldots$, obteniendo:

$$9\,000 = 2^3\times3^2\times5^3$$

(*continúa*)

(*continuación*)
Se determinan los valores de a, b, c, m, n y p

$$a = 2 \quad b = 3 \quad c = 5 \quad m = 3 \quad n = 2 \quad p = 3$$

Estos valores se sustituyen en la fórmula

$$S = \frac{a^{m+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{p+1}-1}{c-1}\cdot\ldots = \frac{2^{3+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{2+1}-1}{3-1}\cdot\frac{5^{3+1}-1}{5-1} = \frac{2^4-1}{2-1}\cdot\frac{3^3-1}{3-1}\cdot\frac{5^4-1}{5-1}$$
$$= \frac{16-1}{2-1}\cdot\frac{27-1}{3-1}\cdot\frac{625-1}{5-1}$$
$$= \frac{15}{1}\cdot\frac{26}{2}\cdot\frac{624}{4}$$
$$= (15)(13)(156)$$
$$= 30\,420$$

Por tanto, la suma de los divisores de 9 000 es 30 420

EJERCICIO 116

1. Calcula la suma de: 2 + 4 +6 + 8 + … + 20
2. Calcula la suma de: 1 + 3 + 6 + 9 + … + 60
3. Calcula la suma de: 5 + 10 + 15 + 20 + … + 200
4. Paola leyó un libro en 15 días; si el primer día leyó 3 páginas y los siguientes días leyó 5 páginas más que el día anterior, ¿cuántas páginas tiene el libro?
5. Calcula la suma de las 100 fracciones que se obtienen al formar todos los cocientes de los números de la siguiente lista: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2 187, 6 561, 19 683
6. Calcula la suma 1 – 3 + 9 – 27 + 81 – 243 + 729 – 2 187
7. Escribe el número 111 111 111 como suma de potencias de 10
8. Escribe el número 111 111 111 111 como suma de potencias de 10
9. Escribe el número 101 010 101 como suma de potencias de 10^2
10. Calcula la suma de todos los divisores positivos de 1 800
11. Expresa $2^{10} + 2^{10}$ como potencia de 2
12. Expresa $3^5 + 3^5 + 3^5$ como potencia de 3
13. Expresa $4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2$ como potencia de 4

Encuentra el número de divisores de:

14. 18
15. 60
16. 210
17. 450
18. ¿Cuántas cifras tiene el número $20^{10} \times 2^{404} \times 5^{403}$?
19. ¿Cuántas cifras tiene el número $40^{420} \times 2^{1\,001} \times 5^{1\,850}$?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Problemas de repartimientos proporcionales

Es una regla por medio de la cual se divide un número propuesto en partes proporcionales a otros números dados. Para dividir un número N en partes proporcionales entre los números x, y y z; se utiliza la siguiente fórmula:

$$\frac{m}{x}=\frac{n}{y}=\frac{p}{z}=\frac{m+n+p}{x+y+z}=\frac{N}{S}\Rightarrow m=\frac{N\cdot x}{S},\ n=\frac{N\cdot y}{S},\ p=\frac{N\cdot z}{S}$$

Donde:
$N = m + n + p$
$S = x + y + z$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Dividir proporcionalmente 700 entre los números 2, 3 y 5.

Solución

Sean m, n y p, lo que le toca a cada parte, respectivamente.

N: cantidad a repartir = $m + n + p = 700$

S: suma los números dados = $x + y + z = 2 + 3 + 5 = 10$

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$m=\frac{N\cdot x}{S}=\frac{(700)(2)}{10}=\frac{1400}{10}=140$$
$$n=\frac{N\cdot y}{S}=\frac{(700)(3)}{10}=\frac{2100}{10}=210$$
$$p=\frac{N\cdot z}{S}=\frac{(700)(5)}{10}=\frac{3500}{10}=350$$

Por tanto, las cantidades son: 140, 210 y 350, respectivamente.

2 Divide proporcionalmente 4 440 entre los números $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

Solución

Sean m, n y p, lo que le toca a cada parte, respectivamente.

N: cantidad a repartir = $m + n + p = 4\,440$

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$\frac{m}{x}=\frac{n}{y}=\frac{p}{z}=\frac{m}{\frac{1}{4}}=\frac{n}{\frac{5}{2}}=\frac{p}{\frac{1}{3}}$$

Al transformar a un mismo denominador (mcm) se obtiene:

$$\frac{m}{x}=\frac{n}{y}=\frac{p}{z}=\frac{m}{\frac{1}{4}}=\frac{n}{\frac{5}{2}}=\frac{p}{\frac{1}{3}}=\frac{m}{\frac{3}{12}}=\frac{n}{\frac{30}{12}}=\frac{p}{\frac{4}{12}}=\frac{m}{3}=\frac{n}{30}=\frac{p}{4}$$

S: suma los números dados = $x + y + z = 3 + 30 + 4 = 37$

$$m=\frac{N\cdot x}{S}=\frac{(4\,440)(3)}{37}=\frac{13\,320}{37}=360$$
$$n=\frac{N\cdot y}{S}=\frac{(4\,440)(30)}{37}=\frac{133\,200}{37}=3600$$
$$p=\frac{N\cdot z}{S}=\frac{(4\,440)(4)}{37}=\frac{17\,760}{37}=480$$

Por tanto, las cantidades son: 360, 3 600 y 480, respectivamente.

3 Se repartieron $1 150 a 3 personas, cuyas edades son: 12, 16 y 18 años. ¿Cuánto le tocó a cada una, si se dividió proporcionalmente a sus edades?

Solución

Sean m, n y p, lo que le toca a cada persona, respectivamente.

N: cantidad a repartir = $m + n + p$ = $1 150

S: suma de las edades = $x + y + z = 12 + 16 + 18 = 46$ años.

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$m = \frac{N \cdot x}{S} = \frac{(1\,150)(12)}{46} = \frac{13\,800}{46} = 300$$
$$n = \frac{N \cdot y}{S} = \frac{(1\,150)(16)}{46} = \frac{18\,400}{46} = 400$$
$$p = \frac{N \cdot z}{S} = \frac{(1\,150)(18)}{46} = \frac{20\,700}{46} = 450$$

Por tanto, cada persona recibió $300, $400 y $450 respectivamente.

4 Se repartieron $2 800 a 4 personas, que tienen respectivamente 4, 6, 10 y 15 años. ¿Cuánto le tocó a cada una, si se dividió inversamente proporcional a sus edades?

Solución

Las razones inversas son: $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}$, lo que indica que la persona de mayor edad recibió menos cantidad de dinero.

Sean l, m, n y p, las partes respectivas, entonces:

$$\frac{l}{w} = \frac{m}{x} = \frac{n}{y} = \frac{p}{z} = \frac{l}{\frac{1}{4}} = \frac{m}{\frac{1}{6}} = \frac{n}{\frac{1}{10}} = \frac{p}{\frac{1}{15}}$$

Se transforman las fracciones a un denominador común (mcm) de 4, 6, 10 y 15

$$\frac{l}{\frac{15}{60}} = \frac{m}{\frac{10}{60}} = \frac{n}{\frac{6}{60}} = \frac{p}{\frac{4}{60}} = \frac{l}{15} = \frac{m}{10} = \frac{n}{6} = \frac{p}{4}$$

Al aplicar la fórmula se obtiene:

N: cantidad a repartir = $l + m + n + p$ = $2 800

S: suma de las edades = $w + x + y + z = 4 + 6 + 10 + 15 = 35$ años

$$l = \frac{N \cdot w}{S} = \frac{(2\,800)(15)}{35} = \frac{42\,000}{35} = 1200$$
$$m = \frac{N \cdot x}{S} = \frac{(2\,800)(10)}{35} = \frac{28\,000}{35} = 800$$
$$n = \frac{N \cdot y}{S} = \frac{(2\,800)(6)}{35} = \frac{16\,800}{35} = 480$$
$$p = \frac{N \cdot z}{S} = \frac{(2\,800)(4)}{35} = \frac{11200}{35} = 320$$

Finalmente:

La persona de 4 años recibió $1 200

La persona de 6 años recibió $800

La persona de 10 años recibió $480

La persona de 15 años recibió $320

5 Se repartieron \$744 000 entre 3 personas, de modo que la parte de la primera persona sea a la segunda como 4 es a 5, y que la parte de la segunda sea a la tercera como 3 es a 7, ¿cuánto le tocó a cada una?

Solución

La segunda parte está representada por 2 números, ésta se modificará para ser representada por un solo número.

Cuando la segunda parte es 5, la primera es 4, entonces si la segunda es 3 veces mayor, la primera también debe de ser 3 veces mayor.

Cuando la segunda parte es 3, la tercera es 7, entonces si la segunda es 5 veces mayor, la tercera también debe de ser 5 veces mayor.

1era parte	2da parte	3ra parte
4	5	
	3	7
$(4)(3)=12$	$(5)(3)=15$ $(3)(5)=15$	$(7)(5)=35$
12	15	35

Por tanto, 744 000 se repartieron en proporción de 12, 15 y 35

Sean m, n y p, lo que le tocó a cada persona.

N: cantidad a repartir = $m + n + p$ = \$744 000

S: suma de las partes = $x + y + z = 12 + 15 + 35 = 62$

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$m=\frac{N\cdot x}{S}=\frac{(744\,000)(12)}{62}=\frac{8\,928\,000}{62}=144\,000$$
$$n=\frac{N\cdot y}{S}=\frac{(744\,000)(15)}{62}=\frac{11\,160\,000}{62}=180\,000$$
$$p=\frac{N\cdot z}{S}=\frac{(744\,000)(35)}{62}=\frac{26\,040\,000}{62}=420\,000$$

Finalmente:

La primera persona recibió \$144 000

La segunda persona recibió \$180 000

La tercera persona recibió \$420 000

6 Antonio deja \$141 000 al morir y dispone en su testamento que dicha suma sea repartida entre su madre, 2 hermanos, 3 hermanas y 2 sobrinos, del modo siguiente: a los 2 sobrinos partes iguales; a cada hermana lo que a un sobrino, más la tercera parte de lo mismo; a cada hermano lo que a una hermana, más la mitad de lo mismo, y a su madre 3 veces la suma de la parte de cada hermano y cada hermana. ¿Cuánto le corresponde a cada heredero?

Solución

Sea 1 la parte de cada sobrino, la de los 2 es $2\times1=2$

La parte que le corresponde a una hermana es: $1+\frac{1}{3}(1)=\frac{4}{3}$, de las 3 es $3\times\frac{4}{3}=4$

La parte que le corresponde a un hermano será $\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)=2$, de los 2 es $2\times2=4$

La parte que le corresponde a la madre será $3\left(\frac{4}{3}+2\right)=3\left(\frac{10}{3}\right)=10$

Luego: sea l lo que toca a los 2 sobrinos, m lo que toca a las 3 hermanas, n lo que corresponde a los 2 hermanos y p lo que toca a la madre.

N: cantidad a repartir = $l + m + n + p$ = \$141 000

S: suma de las partes = $w + x + y + z = 2 + 4 + 4 + 10 = 20$

(*continúa*)

(*continuación*)

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$l=\frac{N\cdot w}{S}=\frac{(141000)(2)}{20}=\frac{282\,000}{20}=14\,100$$
$$m=\frac{N\cdot x}{S}=\frac{(141000)(4)}{20}=\frac{564\,000}{20}=28\,200$$
$$n=\frac{N\cdot y}{S}=\frac{(141000)(4)}{20}=\frac{564\,000}{20}=28\,200$$
$$p=\frac{N\cdot z}{S}=\frac{(141000)(10)}{20}=\frac{1\,410\,000}{20}=70\,500$$

Finalmente:

Cada sobrino recibirá: $\frac{14\,100}{2}=\$7\,050.00$

Cada hermana recibirá: $\frac{28\,200}{3}=\$9\,400.00$

Cada hermano recibirá: $\frac{28\,200}{2}=\$14\,100.00$

La mamá recibirá: $70 500.00

EJERCICIO **117**

1. Guillermo quiere repartir $2 310 entre sus 3 sobrinos de 7, 11 y 15 años. ¿Cuánto le tocará a cada sobrino, si se repartirá proporcionalmente a sus edades?
2. Allan quiere repartir $1 026 entre sus 4 hermanos de 6, 8, 10 y 12 años. ¿Cuánto le tocará a cada hermano, si se reparte inversamente proporcional a su edad?
3. Tres matemáticos se reúnen para resolver una guía de ecuaciones diferenciales, han ganado juntos $3 800; el primero ha trabajado durante 3 días, el segundo durante 6 y el tercero durante 10. ¿Qué parte de la ganancia le corresponde a cada uno en proporción del tiempo de su trabajo?
4. Divide el número 255 en 3 partes, de tal manera que la parte de la primera sea a la de la segunda como 2:5 y la parte de la primera sea a la de la tercera como 1:4, ¿cuánto le corresponde a cada parte?
5. Divide el número 1 020 en 3 partes, de tal manera que la parte de la primera sea a la de la segunda como 1:2 y la parte de la segunda sea a la de la tercera como 3:4, ¿cuánto le corresponde a cada parte?
6. Divide el número 228 en 3 partes, de tal manera que la parte de la primera sea a la de la segunda como $\frac{2}{5}$ es a $\frac{3}{5}$ y la parte de la segunda sea a la de la tercera como $\frac{2}{5}$ es a $\frac{3}{5}$. ¿Cuánto le corresponde a cada parte?
7. Reparte $6 440 entre 3 personas, de tal manera que la parte de la primera sea a la de la segunda como 3 es a 5 y que la parte de la segunda sea a la de la tercera como 1 es a 3, ¿cuánto le toca a cada persona?
8. José Luis muere dejando en su testamento una herencia de $234 000 a una hermana que se encuentra en otro país, y de quien nunca tuvo noticias, el notario lee el testamento: "Si mi hermana tiene una hija, dejo para ella las $\frac{3}{4}$ partes de la herencia y $\frac{1}{4}$ para la madre; pero si tiene un hijo, a éste le tocará $\frac{1}{4}$ de la herencia y las $\frac{3}{4}$ partes para la madre". Sucede que la hermana tiene un hijo y una hija, ¿cuánto le corresponde a cada heredero?
9. Jorge deja $142 500 al morir y dispone en el testamento que dicha suma se reparta entre sus 4 hermanas, 2 hermanos y 5 sobrinos, de tal manera que: los 5 sobrinos a partes iguales, a cada hermana lo que a un sobrino, más $\frac{2}{3}$ de lo mismo, a cada hermano lo que a una hermana, más $\frac{1}{4}$ de lo mismo. ¿Cuánto le corresponde a cada heredero?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente